



A KOMBINATÍV GONDOLKODÁS LONGITUDINÁLIS VIZSGÁLATA: A TESZTEN NYÚJTOTT TELJESÍTMÉNY ÉS A FELADATOK MEGÉRTÉSÉNEK VÁLTOZÁSA 4–5. ÉS 6–7. ÉVFOLYAMOK KÖZÖTT

Gál-Szabó Zsófia * és Korom Erzsébet **

* *Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Doktori Iskola;
MTA-SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoport*

** *Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet Oktatásemélet Tanszék;
MTA-SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoport*

A kombinatív gondolkodás és vizsgálata Piaget óta (Inhelder & Piaget, 1967; Piaget, 1970) foglalkoztatja a kutatókat. Mindez érthető, hiszen a kombinatív gondolkodás számos területre hatással van. Alapvető összetevője például a kísérleti gondolkodásnak (Poddiakov, 2011), a természettudományos ismeretek megértésének (Bitner, 1991; Cavallo, 1996; Yilmaz & Alp, 2006) és az alkotóképességnek (Csapó, 1987; Simonton, 2010), illetve fontos szerepe van a problémamegoldásban (English, 1993, 2005) és a valószínűségi gondolkodásban (Batanero, Godino, & Navarra-Pelayo, 1997; English, 2005). A területhez kötődő kutatások (pl. Mashiach-Eizenberg & Zaslavsky, 2004; Melusova & Vidermanova, 2015; Szitányi & Csíkos, 2015) számos kérdésre, kihívásra (pl. tanulók hiányos tudása, terület tanításának nehézségei) hívják fel a figyelmet, illetve további feltáró vizsgálatokra ösztönöznek (Lockwood, 2015).

A kombinatív gondolkodás vizsgálatában matematikai, tantárgy-pedagógiai fókuszú (pl. English, 1991; Halani, 2012; Kosztolányi, Pintér, Bagota, & Dancs, 2016; Lockwood, 2013; Melusova & Vidermanova, 2015; Poddiakov, 2011; Szitányi & Csíkos, 2015), illetve pedagógiai, pszichológiai megközelítésű kutatások (pl. Csapó, 2001; Csapó & Pásztor, 2015; Gál-Szabó & Korom, 2018; Nagy, 2004; Hajdúné Holló, 2004; Zentai, Hajdúné Holló, & Józsa, 2018) egyaránt megtalálhatók. Az első csoportba tartozó munkák többnyire egy vagy néhány kombinatív feladatra (műveletre) koncentrálnak, míg az utóbbiba tartozók a kombinatív gondolkodásra mint a gondolkodás egyik összetevőjére, egy meghatározott műveletekből álló elméleti konstruktumra tekintenek. A képesség kapcsán hazánkban két elméleti modell ismert, a Csapó-féle (1988) nyolc műveletből álló, valamint a Nagy József-féle (2004) négy készségből és 16 részkészségből álló megközelítés. Jelen kutatás a Csapó-féle modellre épül, és a kombinatív gondolkodást mint megadott elemekből, meghatározott feltételek szerint rendezett egységek létrehozását lehetővé tevő képességet vizsgálja (I. Adey & Csapó, 2012).

A Csapó-féle modellen alapuló kutatások (l. pl. Csapó, 2001; Csapó & Pásztor, 2015; Gál-Szabó & Korom, 2018) mérőeszközei hat kombinatív művelettípusra – Descartes-féle sorozatok, összes részhalmaz, összes ismétléses variáció, ismétlés nélküli variáció, ismétléses variáció, ismétlés nélküli kombináció – tartalmaznak feladatokat. Jellegüket tekintve a feladatok felsoroló kombinatív problémák (Batanero et al., 1997), melyek az összes lehetséges megoldás felsorolását kérik a feladatmegoldótól. A vizsgálatokban a tanulói válaszok értékelése a j-index (Csapó, 1988) alapján történik, ami a helyes és a helytelen vagy felesleges konstrukciókat viszonyítja az összes lehetséges megoldáshoz.

A gondolkodási folyamatok részletesebb feltárása, valamint a fejlesztést megalapozó értékelés támogatása érdekében hasznos lehet a teljesítmények alakulását befolyásoló tényezők, például a feladatok megértése vagy a feladatmegoldás során használt stratégiák vizsgálata (Gál-Szabó & Korom, 2018). Tanulmányunkban ezek közül a feladatok feltételeinek megértését elemezzük három kritériumváltozó, az elemszám, az ismétlődés és a felcserélhetőség mentén. A kombinatív gondolkodás mint gondolkodási képesség vizsgálatával több hazai kutatás is foglalkozik (pl. Csapó, 2001; Nagy, 2004; Hajduné Holló, 2004; Gál-Szabó & Korom, 2018; Zentai, Hajduné Holló, & Józsa, 2018), azonban nincsen tudomásunk longitudinális vizsgálatról. Az említett keresztmetszeti kutatások egy része (Csapó, 2001; Hajduné Holló, 2004; Nagy, 2004) a kombinatív gondolkodás fejlődésének feltárására irányult. Csapó (2001) a 3., 5., 7., 9. és 11. évfolyamok vizsgálata kapcsán a kombinatív képesség folyamatos, de eltérő intenzitású fejlődéséről számol be, eredményei alapján az 5. és a 7. évfolyam között fejlődik legintenzívebben a képesség, míg egy másik nagymintás vizsgálat (Gál-Szabó & Korom, 2018) alapján egy kombinatív teszten és annak minden feladatán számottevően javult a teljesítmény a 4. és a 6. évfolyam között. A képesség fejlődéséről tehát rendelkezünk információkkal, azonban a teljesítmények alakulását befolyásoló tényezőkben bekövetkező változások elemzésére még nem került sor.

Célok, kutatási kérdések

Követéses vizsgálatunk célja a kombinatív gondolkodás kapcsán (1) a j-indexel jellemzett tanulói teljesítmények alakulásának, valamint (2) a feladatok feltételeinek megértésében bekövetkező változások vizsgálata a 4. és 5., illetve a 6. és 7. évfolyam között. Az első célhoz kapcsolódóan az alábbi kutatási kérdésekre keressük a választ: Hogyan alakul a tanulók teljesítménye a teljes teszten (K_1), illetve az egyes feladatokon (K_2)? Tapasztalható-e átrendeződés a feladatok nehézségi sorrendjében egy év elteltével (K_3)? Milyen mértékű a fejlődés a kombinatív gondolkodás (K_4) és az egyes feladatok (kombinatív műveletek) esetében (K_5)? A második céllal összefüggésben három kérdést fogalmaztunk meg: Hogyan alakul a feladatok feltételeinek megértése három kritériumváltozó (elemszám, ismétlődés, felcserélhetőség) mentén az egyes feladatoknál (K_6), feladatonként összesítve a kritériumokat (K_7), illetve a teljes tesztet tekintve (K_8)?

Módszerek

Minta

Vizsgálatunk mintáját egy nagymintás adatfelvétel (Gál-Szabó & Korom, 2018) 4. és 6. évfolyamos tanulói ($N_{4.\text{évf.}}=790$, $N_{6.\text{évf.}}=751$) alkotják. A felmérésben részt vevő osztályokat egy év elteltével ismét felkértük a kutatásban való részvételre. Az önkéntes jelentkezés eredményeképpen a második mérésben összesen 491 tanuló adatai állnak rendelkezésünkre. Közülük 370 tanuló ($N_{5.\text{évf.}}=187$, $N_{7.\text{évf.}}=183$) vett részt mindkét adatfelvételben. A nagy létszámkülönbség oka – a méréskor való hiányzások és az osztályokban történő változások mellett –, hogy néhány intézmény a korábbi adatfelvételhez képest további osztályaival is részt szeretett volna venni a mérésben, amit nem utasítottunk vissza.

Az adattisztítás során a mindkét adatfelvételben részt vevő tanulók közül kizártuk azokat, akik a rögzített adatok alapján feltételezhetően félbehagyták a feladatok megoldását vagy átugrottak feladatokat. Ennek tényét a feladatok legalább felére (4 db) semmilyen választ nem adó kitöltésekben határoztuk meg. A kizárások eredményeként a tanulmányban bemutatott elemzéseket az 1. táblázatban ismertetett mintán végeztük el. A táblázatban és a továbbiakban I. részmintaként hivatkozunk a fiatalabb korosztályra, akik az első adatfelvételkor 4. évfolyamosok voltak, és II. részmintaként az idősebbekre, akik ebben az időpontban 6. évfolyamosok voltak.

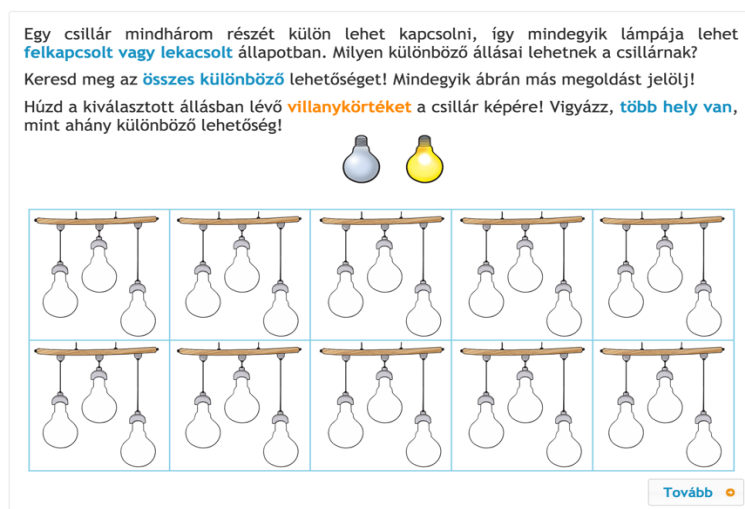
1. táblázat. Az adatelemzésbe bevont minta jellemzői (fő)

| Részminta | N | Fiú | Lány | Nem válaszolt |
|-----------|-----|-----|------|---------------|
| I. | 183 | 96 | 87 | 0 |
| II. | 172 | 84 | 87 | 1 |

Mérőeszköz

A kutatás során egy három részből álló online mérőeszközt használtunk, mely egy háttérkérdőívből, egy kombinatív tesztből és egy feladatmegoldáshoz kapcsolódó kérdőívből áll. Az elvégzett elemzések szempontjából ezek közül a teszt érdekes, ami a Csapó-féle kombinatív teszt digitalizált változata (Csapó & Pásztor, 2015) alapján készült. Az eredeti tesztben szereplő hat képi feladatot vettük alapul, melyek struktúráján és sorrendjén nem változtattunk, és három feladatnál annak kontextusát is átvettük. A feladatok a tesztben szereplő sorrendben a következő kombinatív műveletek értékelését teszik lehetővé: Descartes-féle sorozatok (DSZ), összes részhalmaz (ÖRH), összes ismétléses variáció (ÖIV), ismétlés nélküli variáció (INV), ismétléses variáció (ISV), ismétlés nélküli kombináció (INK). Az említett hat feladat elé beillesztettünk két, minden szempontból saját fejlesztésű feladatot, melyek szintén a Descartes-féle sorozatok művelethez kapcsolódnak. A

teszt feladataiban a tanulóknak az adott művelet feltételei alapján kell a megadott elemkészletből (feladattól függően 2–4x3, illetve 2–5), az adott hosszúságú (feladattól függően 1–4 elem) összes lehetséges összeállítást (feladattól függően 6–20 db) létrehozniuk. A feltételeket a szöveges instrukció, valamint a válaszadó terület rajzai határozzák meg, amelyek alapján az elemkészlet színes elemeinek vonszolásával („drag and drop” technika) lehetséges a válaszadó terület fekete-fehér rajzain a megoldás megadása. Az 1. ábra illusztrálja a teszt feladatainak jellegét, elrendezését (a teszt részletes leírását l. Gál-Szabó & Korom, 2018).



1. ábra

A teszt 7. feladatának megoldás előtti állapota (művelettípus: ismétléses variáció)

Eljárások

A követéses vizsgálat első adatfelvétele 2017. december és 2018. január, a második 2018. november és 2019. január között valósult meg. Mindkét alkalommal ugyanazt a mérőeszközt közvetítettük ki az eDia online mérés-értékelési rendszerben (Csapó & Molnár, 2019; Molnár & Csapó, 2019), melynek megoldására egy tanóra állt a tanulók rendelkezésére. Az adatfelvételek az iskolai számítógéptermben zajlottak a helyi pedagógusok vezetésével, központi mérési útmutató alapján.

A tanulók teljesítményét a Csapó-féle j-index segítségével jellemeztük, aminek értékét úgy kapjuk meg, hogy a helyes összeállítások számát szorozzuk az összes lehetséges összeállítás, valamint a helytelen és felesleges összeállítások számának különbségével, majd mindezt osztjuk az összes lehetséges összeállítás számának négyzetével. Az index 0 és 1 közötti értéket vehet fel, ahol az 1-es érték jelenti a feladat feltételeinek megfelelő összes

konstrukcióból álló tökéletes megoldást. A mutatót – a technológiaalapú tesztelésnek köszönhetően – az adatfelvételt követően automatikusan megkapjuk az egyes feladatokra és a teljes tesztre is. Az eredmények ismertetésénél a mutató értékét százalékra átszámítva használjuk.

A fejlődés mértékének jellemzésére a Csapó (2002) által kidolgozott gamma koefficiens, röviden gammát használtuk, ami keresztmetszeti és longitudinális felméréseknél egyaránt alkalmas a fejlődés kifejezésére. A mutató kiszámítási módja a következő: a két mérés átlagának különbsége osztva a két mérés szórásának átlagával, mindez osztva a két mérés között eltelt évek számával. A gamma értékét a teljes tesztre, valamint az egyes műveletekre (feladatokra) is megadjuk.

A feladatok feltételeinek megértése a kombinatív műveletek jellegéből adódóan három kritérium szerint vizsgálható (l. Gál-Szabó & Korom, 2018): (1) a konstrukciók hosszára vonatkozó elemszám, (2) az összeállításokban előforduló ismétlődő elemeket néző ismétlődés, valamint (3) az elemek sorrendjével összefüggésbe hozható felcserélhetőség. A változók az adott kritériumnak való megfelelés, illetve nem megfelelés alapján két értéket vehetnek fel (1 és 0). A j-indexhez hasonlóan a műveletek megértését vizsgáló változók is automatikusan kiszámolhatók a rögzített adatok alapján. A három kritériumváltozó közül a műveletek és a feladatkiakítás jellegéből adódóan (részletesen l. Gál-Szabó & Korom, 2018) a Descartes-féle sorozatokhoz kapcsolódó feladatoknál csak az elemszámot, az összes részhalmaz és az ismétlés nélküli kombináció feladatok esetében csak az elemszám és az ismétlődés változókat használjuk. A feladatok feltételeinek megértésében bekövetkező változások vizsgálhatósága érdekében a két adatfelvétel eredményei alapján új változókat hoztunk létre. Értelmezésünkben a megértés romlott (-1), ha először megfelelt a válasz az adott kritériumnak és másodszor nem, míg fordított esetben javult (1), végül nem változott (0), ha a válasz mindkét alkalommal megfelelt vagy nem felelt meg az adott kritériumnak. Az így képzett változókat az eredmények ismertetésénél háromféleképpen használjuk. Egyrészt foglalkozunk feladatonként az egyes kritériumokban bekövetkezett változásokkal (-1/0/1), másrészt feladatonként összesítve tárgyaljuk a változásokat (feladatoktól függően: -1/0/1, -2/-1/0/1/2, -3/-2/-1/0/1/2/3), végül a teljes tesztre összegezve nézzük a két adatfelvétel közötti változásokat. Előfordulnak olyan tesztmegoldások, ahol a tanulók valamelyik feladatra/feladatokra nem adtak választ. Az ilyen esetekben a feltételeknek való megfelelés érthető módon nem vizsgálható. Az eredmények fejezetben ezeket „hiányzó”, illetve „hiányzó adat” kifejezésekkel tüntetjük fel. A változókkal kapcsolatos eredményeket a klasszikus tesztelmélet eszköztárát használva t-próbák és gyakorisági eloszlások alapján ismertetjük.

Eredmények

A teszt – a j-index értékei alapján – az adatelemzésbe bevont mintán mindkét korosztályban, mindkét időpontban megfelelően működött (I. részminta: Cronbach- α =0,86 és 0,87; II. részminta: Cronbach- α =0,87 és 0,88).

A teszt- és feladatteljesítmények változása

Az átlagteljesítmények alapján (2. táblázat) a teszt nehézsége a fiatalabb korosztályban átlag körüli, az idősebbek körében az átlagosnál valamivel könnyebb volt. Egy év elteltével mindkét korosztályban számottevően javult a teljes teszten nyújtott teljesítmény.

2. táblázat. A teszten nyújtott teljesítmények (%p) alakulása korosztályonként

| Részminta | 2017/18 | | 2018/19 | | Különbség | t-próba | |
|-----------|---------|--------|---------|--------|-----------|---------|-------|
| | Átlag | Szórás | Átlag | Szórás | | t | p |
| I. | 53,60 | 21,67 | 57,76 | 21,67 | 4,16 | 3,05 | <0,01 |
| II. | 64,96 | 21,01 | 70,23 | 21,50 | 5,27 | 4,49 | <0,01 |

Ugyanakkor a nyolc feladatot önállóan nézve (3. táblázat) nem minden esetben van számottevő ($p < 0,05$) változás a két adatfelvétel között. Az I. részmintában két esetben, az egyik Descartes-féle sorozatok (1.) és az ismétléses variáció (7.) feladatokon nyújtott teljesítményeknél történt javulás. A II. részminta tanulói az említett feladatokon túl további három (tehát összesen öt) esetben teljesítettek jobban a második adatfelvételnél. Az érintett feladatok a következők: két Descartes-féle sorozatok (1. és 3.), az összes ismétléses variáció (5.), az ismétléses variáció (7.), valamint az ismétlés nélküli kombináció (8.).

3. táblázat. A feladatokon nyújtott teljesítmények (%p) alakulása korosztályonként

| Feladat | I. részminta | | | | II. részminta | | | |
|---------|--------------|--------|-----------|--------|---------------|--------|-----------|--------|
| | 2017–2018 | | 2018–2019 | | 2017–2018 | | 2018–2019 | |
| | Átlag | Szórás | Átlag | Szórás | Átlag | Szórás | Átlag | Szórás |
| 1. DSZ | 68,23 | 33,40 | 76,59 | 28,57 | 76,03 | 30,78 | 88,02 | 21,38 |
| 2. DSZ | 70,37 | 33,75 | 74,28 | 32,02 | 82,95 | 25,95 | 85,45 | 27,76 |
| 3. DSZ | 68,20 | 33,28 | 73,25 | 33,20 | 79,08 | 28,97 | 86,28 | 26,43 |
| 4. ÖRH | 33,71 | 32,24 | 38,41 | 31,51 | 46,42 | 33,55 | 50,20 | 33,62 |
| 5. ÖIV | 46,45 | 25,51 | 49,35 | 26,31 | 55,24 | 26,36 | 61,59 | 27,36 |
| 6. INV | 53,18 | 28,77 | 52,78 | 29,13 | 64,59 | 28,35 | 64,00 | 30,72 |
| 7. ISV | 59,61 | 29,94 | 64,95 | 29,08 | 70,42 | 27,62 | 75,50 | 27,22 |
| 8. INK | 29,07 | 27,38 | 32,45 | 29,33 | 44,94 | 32,06 | 50,80 | 35,09 |

Megjegyzés: A dőlttel jelölt esetekben számottevő a teljesítmények változása a két adatfelvétel között a páros t-próbák eredményei alapján ($p < 0,05$). DSZ: Descartes-féle sorozatok, ÖRH: összes részhalmaz, ÖIV: összes ismétléses variáció, INV: ismétlés nélküli variáció, ISV: ismétléses variáció, INK: ismétlés nélküli kombináció.

A feladatok nehézségi sorrendjében – a páros t-próbák eredményei alapján – csupán minimális átrendeződés tapasztalható mindkét korosztályban. A fiatalabbak eredményei azt mutatják, hogy az első adatfelvételnél az első három Descartes-féle sorozatok feladat volt a legkönnyebb, amit sorban az ismétléses variáció (7.), az ismétlés nélküli variáció

(6.) és az összes ismétléses variáció (5.) feladatok követnek vagy követtek. A két legnehezebb feladatnak a 4. és a 8. bizonyult. Ehhez a sorrendhez képest a második adatfelvételkor a 6. és az 5. feladat nehézsége között megszűnt a különbség, míg a két legnehezebb feladat differenciálódott, és a teszt utolsó feladata lett a legnehezebb. Az idősebb korosztálynál az első adatfelvétel alapján a legkönnyebb feladat a 2. Descartes-féle sorozatok volt, amit azonos nehézséggel a további két Descartes-féle sorozatok feladat követett. Ezt követően a nehézségi sorrend azonos az I. részmintában leírtakkal ($7. > 6. > 5. > 4. = 8.$). Egy évvel később a Descartes-féle sorozatok feladatok nehézségi sorrendjében volt átrendeződés ($3. = 2.$ és $1. = 3.$, valamint $1. > 2.$), továbbá a másik részmintához hasonlóan a 6. és az 5. feladat azonos nehézségűnek bizonyult.

A teljes teszten nyújtott teljesítmények (átlagok és szórások) alapján az éves fejlődés mértéke az idősebb minta esetében nagyobb ($\gamma=0,25$), mint a fiatalabb mintánál ($\gamma=0,19$). A 4. és az 5. táblázat feladatonként mutatja a fejlődés mértékét a két részmintában (csak a statisztikai próbák alapján számottevő fejlődést mutató feladatokkal foglalkozunk). A γ értékek szerint eltérő a fejlődés mértéke az egyes feladatok esetében. Mindkét részmintában a tesztben később szereplő feladatoknál kisebb a fejlődés mértéke. A két részmintát összevetve: az idősebb korosztálynál szerepelnek magasabb γ értékek.

4. táblázat. A fejlődés mértéke (γ koefficiens) az egy év alatt számottevő teljesítményjavulást mutató feladatoknál az I. részmintában

| Feladat | 2017–2018 | | 2018–2019 | | Fejlődés (γ) |
|---------|-----------|--------|-----------|--------|-----------------------|
| | Átlag | Szórás | Átlag | Szórás | |
| 1. DSZ | 68,23 | 33,40 | 76,59 | 28,57 | 0,27 |
| 7. ISV | 59,61 | 29,94 | 64,95 | 29,08 | 0,18 |

Megjegyzés: DSZ: Descartes-féle sorozatok, ISV: ismétléses variáció.

5. táblázat. A fejlődés mértéke (γ koefficiens) az egy év alatt számottevő teljesítményjavulást mutató feladatoknál a II. részmintában

| Feladat | 2017–2018 | | 2018–2019 | | Fejlődés (γ) |
|---------|-----------|--------|-----------|--------|-----------------------|
| | Átlag | Szórás | Átlag | Szórás | |
| 1. DSZ | 76,03 | 30,78 | 88,02 | 21,38 | 0,46 |
| 3. DSZ | 79,08 | 28,97 | 86,28 | 26,43 | 0,26 |
| 5. ÖIV | 55,24 | 26,36 | 61,59 | 27,36 | 0,24 |
| 7. ISV | 70,42 | 27,62 | 75,50 | 27,22 | 0,19 |
| 8. INK | 44,94 | 32,06 | 50,80 | 35,09 | 0,17 |

Megjegyzés: DSZ: Descartes-féle sorozatok, ÖIV: összes ismétléses variáció, ISV: ismétléses variáció, INK: ismétlés nélküli kombináció.

A feladatok megértésének változása

A következőkben a feladatok feltételeinek megértésében bekövetkező változásokat ismertetjük. A három kritériumot külön-külön nézve (6–8. táblázat), összességében az látható, hogy a tanulók többségénél (55,2–87,8%) nincs változás (0) a feladatok feltételeinek megértésében. Feladatonként és feltételeként jelentősen eltér annak aránya, hogy mindez az adott kritériumnak való megfelelést vagy nem megfelelést jelenti, azonban ennek bemutatása túlmutat a tanulmány keretein. A továbbiakban azon válaszok arányaival foglalkozunk, amelyeknél az adott kritérium alapján romlott (-1), illetve javult (1) a megértés.

Az elemszám kritérium (6. táblázat) mind a nyolc feladatnál vizsgálható. Az I. részmintában két Descartes-féle sorozatok feladatnál (1. és 3.) láthatóan nagyobb azon válaszok aránya, ahol az első adatfelvételkor a tanuló válasza még nem felelt meg a kritériumnak, de a másodiknál már igen. A II. részmintában négy feladatnál (1. és 2. Descartes-féle sorozatok, 7. ismétléses variáció, 8. ismétlés nélküli kombináció) tapasztaltunk jelentős javulást. Ezzel szemben a fiatalabb korosztály körében két feladatnál (5. összes ismétléses variáció, 8. ismétlés nélküli kombináció), az idősebbeknél egynél (5.) valamivel gyakoribb az, hogy a válaszok az első esetben megfelelnek és a másodikban nem felelnek meg a kritériumnak. A többi esetben (a 4. és a 3. feladatnál) közel azonos arányban jelenik meg a romlás és a javulás.

6. táblázat. A válaszok eloszlása (%) az elemszám feltételnek való megfelelés változása alapján feladatonként (-1: romlott; 0: nem változott; 1: javult)

| Feladat | I. részmintá | | | | II. részmintá | | | |
|---------|--------------|-------|-------|---------|---------------|-------|-------|---------|
| | -1 | 0 | 1 | hiányzó | -1 | 0 | 1 | hiányzó |
| 1. DSZ | 13,66 | 63,93 | 21,86 | 0,55 | 6,98 | 70,93 | 22,09 | 0,00 |
| 2. DSZ | 13,66 | 71,04 | 14,75 | 0,55 | 7,56 | 78,49 | 13,37 | 0,58 |
| 3. DSZ | 9,84 | 72,13 | 16,39 | 1,64 | 11,05 | 72,67 | 15,70 | 0,58 |
| 4. ÖRH | 17,49 | 61,75 | 17,49 | 3,28 | 23,26 | 52,33 | 22,09 | 2,33 |
| 5. ÖIV | 22,40 | 55,19 | 19,67 | 2,73 | 22,09 | 62,21 | 15,12 | 0,58 |
| 6. INV | 9,29 | 78,69 | 10,38 | 1,64 | 7,56 | 81,98 | 9,30 | 1,16 |
| 7. ISV | 7,65 | 80,33 | 9,29 | 2,73 | 5,81 | 81,98 | 11,05 | 1,16 |
| 8. INK | 19,67 | 61,20 | 16,94 | 2,19 | 9,30 | 72,09 | 14,53 | 4,07 |

Megjegyzés: DSZ: Descartes-féle sorozatok, ÖRH: összes részhalmaz, ÖIV: összes ismétléses variáció, INV: ismétlés nélküli variáció, ISV: ismétléses variáció, INK: ismétlés nélküli kombináció.

Az ismétlődés kritériuma (7. táblázat) a Descartes-féle sorozatok feladatok kivételével a teszt további öt feladatánál vizsgálható. Mindkét korosztályban az összes ismétléses variáció feladatnál (5.) látható jelentős javulás, míg a fiatalabbaknál két feladatnál (6. és 8.) visszaesés tapasztalható. A két részmintá további feladatainál lényegében nem változott (I. részmintá 4. feladat, II. részmintá 6. feladat), illetve néhány százalékot javult (I. részmintá 7. feladat, II. részmintá 4., 7., 8. feladatok) a megértés az ismétlődés kritériumát nézve.

A kombinatív gondolkodás longitudinális vizsgálata: a teszten nyújtott teljesítmény és a feladatok megértésének változása 4–5. és 6–7. évfolyamok között

7. táblázat. A válaszok eloszlása (%) az ismétlődés feltételnek való megfelelés változása alapján feladatonként (-1: romlott; 0: nem változott; 1: javult)

| Feladat | I. rész minta | | | | II. rész minta | | | |
|---------|---------------|-------|-------|---------|----------------|-------|-------|---------|
| | -1 | 0 | 1 | hiányzó | -1 | 0 | 1 | hiányzó |
| 4. ÖRH | 19,13 | 57,92 | 19,67 | 3,28 | 16,86 | 59,30 | 21,51 | 2,33 |
| 5. ÖIV | 15,85 | 56,28 | 25,14 | 2,73 | 13,95 | 59,88 | 25,58 | 0,58 |
| 6. INV | 19,13 | 66,67 | 12,57 | 1,64 | 13,95 | 71,51 | 13,37 | 1,16 |
| 7. ISV | 10,38 | 72,13 | 14,75 | 2,73 | 6,98 | 81,98 | 9,88 | 1,16 |
| 8. INK | 19,13 | 63,39 | 15,30 | 2,19 | 10,47 | 71,51 | 13,95 | 4,07 |

Megjegyzés: ÖRH: összes részalmaz, ÖIV: összes ismétléses variáció, INV: ismétlés nélküli variáció, ISV: ismétléses variáció, INK: ismétlés nélküli kombináció.

A felcserélhetőség kritérium esetében három feladatnál rendelkezünk adatokkal. Az ismétléses variáció feladatnál (6.) jelentős visszaesést tapasztaltunk mindkét korosztályban. A további két feladatnál az I. rész mintában néhány százalékos javulás tapasztalható, míg a II. rész mintában közel változatlan a felcserélhetőség kritériumnak való megfelelés.

8. táblázat. A válaszok eloszlása (%) a felcserélhetőség feltételnek való megfelelés változása alapján feladatonként (-1: romlott; 0: nem változott; 1: javult)

| Feladat | I. rész minta | | | | II. rész minta | | | |
|---------|---------------|-------|-------|---------|----------------|-------|-------|---------|
| | -1 | 0 | 1 | hiányzó | -1 | 0 | 1 | hiányzó |
| 5. ÖIV | 18,03 | 56,83 | 22,40 | 2,73 | 17,44 | 65,12 | 16,86 | 0,58 |
| 6. INV | 22,95 | 61,75 | 13,66 | 1,64 | 23,26 | 63,37 | 12,21 | 1,16 |
| 7. ISV | 8,20 | 78,69 | 10,38 | 2,73 | 5,23 | 87,79 | 5,81 | 1,16 |

Megjegyzés: ÖIV: összes ismétléses variáció, INV: ismétlés nélküli variáció, ISV: ismétléses variáció.

A következőkben feladatonként összesítve vesszük számba a kritériumoknak való megfelelés változását (9. és 10. táblázat). Mivel a Descartes-féle sorozatok feladatoknál a megértést egyetlen kritérium alapján elemeztük, így ezen esetekben nem releváns az összesítés, ezért csak a további öt feladattal foglalkozunk. Legnagyobb arányban (36,1–70,9%) minden feladatnál, mindkét rész mintában, azok a megoldások vannak – az egyes kritériumoknak való megfeleléssel összhangban –, amelyeknél nincs változás (0) a feltételek megértésében. A II. rész minta esetében kiemeljük az ismétléses variáció feladatot (7.), amelynél a többi esethez képest (36,1–58,7%) kiugróan magasabb (70,9%) a két mérési időpontban ugyanannyi kritériumnak megfelelő válaszok aránya. A kritériumszám szempontjából változatlan megoldásokat mindkét korosztályban sorra az egy (-1 és 1), kettő (-2 és 2), illetve három (-3 és 3) kritériumnyi változás követi. A javulás és romlás közötti különbséget nézve az I. rész mintában a 6. és a 8. feladatnál az idővel kevesebb kritériumnak megfelelő, míg a 7. feladatnál az idővel több kritériumnak megfelelő válaszok felé tolódik el az arány. A II. rész mintában a 6. feladatnál szintén romlást, ezzel

szemben a 8. feladatnál javulást láttunk. A többi esetben a javulás és a romlás arányában nincs lényegi különbség.

9. táblázat. A válaszok eloszlása (%) a kritériumoknak (feladattól függően kettő vagy három) való megfelelés változása alapján feladatonként az I. részmintában

| Feladat | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | hiányzó |
|---------|------|------|-------|-------|-------|------|------|---------|
| 4. ÖRH | – | 5,46 | 20,22 | 42,62 | 25,14 | 3,28 | – | 3,28 |
| 5. ÖIV | 0,00 | 6,56 | 22,40 | 36,07 | 20,22 | 9,84 | 2,19 | 2,73 |
| 6. INV | 0,55 | 6,01 | 27,87 | 42,08 | 17,49 | 3,83 | 0,55 | 1,64 |
| 7. ISV | 1,09 | 3,28 | 12,57 | 54,64 | 21,31 | 3,83 | 0,55 | 2,73 |
| 8. INK | – | 4,37 | 24,59 | 46,99 | 16,94 | 4,92 | – | 2,19 |

Megjegyzés: ÖRH: összes részalmaz, ÖIV: összes ismétléses variáció, INV: ismétlés nélküli variáció, ISV: ismétléses variáció, INK: ismétlés nélküli kombináció.

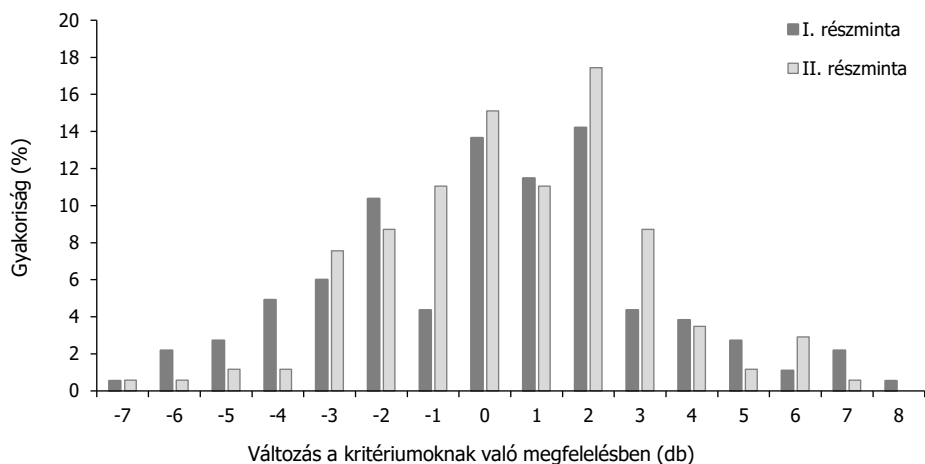
10. táblázat. A válaszok eloszlása (%) a kritériumoknak (feladattól függően kettő vagy három) való megfelelés változása alapján feladatonként a II. részmintában

| Feladat | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | hiányzó |
|---------|------|------|-------|-------|-------|-------|------|---------|
| 4. ÖRH | – | 8,72 | 18,02 | 42,44 | 18,02 | 10,47 | – | 2,33 |
| 5. ÖIV | 0,00 | 5,81 | 23,26 | 40,12 | 22,67 | 6,40 | 1,16 | 0,58 |
| 6. INV | 1,16 | 5,23 | 22,67 | 48,84 | 15,70 | 4,65 | 0,58 | 1,16 |
| 7. ISV | 0,58 | 0,58 | 9,88 | 70,93 | 13,37 | 2,33 | 1,16 | 1,16 |
| 8. INK | – | 2,91 | 11,63 | 58,72 | 19,19 | 3,49 | – | 4,07 |

Megjegyzés: ÖRH: összes részalmaz, ÖIV: összes ismétléses variáció, INV: ismétlés nélküli variáció, ISV: ismétléses variáció, INK: ismétlés nélküli kombináció.

Végül a teszt nyolc feladatára összesítve elemeztük a kritériumoknak való megfelelés változását (2. ábra). A két mérést összevetve a feladatmegoldások a legrosszabb esetben hét kritériummal kevesebbnek, a legjobb esetben pedig hét, illetve nyolc kritériummal többnek felelhetnek meg. Az adatok mindkét korosztályban a két szélsőség között helyezkednek el, és közelítenek a normál eloszláshoz. A két részmintát összevetve a fiatalabbak körében gyakoribb a kritériumoknak való megfelelésben a visszaesés, míg az idősebbeknél a javulás. A tanulói válaszok több mint fele (I. részmintában 54,1%, II. részmintában 63,4%) mindkét mérési pontban ugyanannyi, illetve egy-két kritériummal többnek vagy kevesebbnek felel meg. Más szempontból megközelítve: 13,7 és 15,1% a változatlan, 31,2 és 30,8% a kevesebb és 40,4 és 45,4% a több kritériumnak megfelelő tesztmegoldások aránya a két korosztályban (az első érték mindig az I. részmintára, a második a II. részmintára vonatkozik).

A kombinatív gondolkodás longitudinális vizsgálata: a teszten nyújtott teljesítmény és a feladatok megértésének változása 4–5. és 6–7. évfolyamok között



2. ábra

A válaszok alakulása a kritériumoknak való megfelelés változása alapján a teljes tesztet nézve (Az I. részmintában 14,75%, a II. részmintában 8,72% a hiányzó adat.)

Az eredmények értelmezése

Az eredmények alapján a második mérési alkalommal mindkét korosztály számottevően jobb eredményt ért el a teszten (K_1), ami arra enged következtetni, hogy a vizsgált minta kombinatív gondolkodása fejlődött egy év alatt. Mindez nem meglepő, hiszen korábbi kutatások eredményei alapján (pl. Csapó, 2001; Gál-Szabó & Korom, 2018) erre számítottunk. Azonban a tanulók teljesítménye nem javult minden feladaton, a fiatalabb korosztályban kettő feladatnál, az idősebb korosztálynál ötnél azonosítottunk számottevő pozitív változást (K_2). A többi esetben statisztikailag nincs különbség a feladatokon nyújtott teljesítményben. Mindez azt jelzi, hogy a vizsgált minta esetében a spontán fejlődés nem érinti mindegyik kombinatív műveletet.

Ezzel szemben nagymintás keresztmetszeti vizsgálatunkban (Gál-Szabó & Korom, 2018) a 4. és a 6. évfolyam között mindegyik feladatnál számottevő volt a javulás, bár nem elhanyagolható, hogy ebben az esetben két év különbségről van szó. Csapó (2001) korábbi kutatásaiban a tesztünkben használt feladatokkal azonos struktúrájú feladatokkal az 5. és a 7. évfolyam közötti időszakban mutatott ki intenzívebb fejlődést. Elképzelhetőnek tartjuk, hogy ezzel hozható összefüggésbe, hogy a 4. és az 5. évfolyam között kevesebb feladatnál azonosítottunk számottevő fejlődést, mint a 6. és a 7. évfolyam között. A jelentős fejlődést mutató feladatok között egyaránt találunk a teszt legnehezebb és legkönnyebb, valamint annak köztes tartományából feladatokat. Továbbá az összes lehetséges megoldás száma, illetve a műveletek feltételei szempontjából is változatosak ezek a fel-

adatok. Mindezek alapján valószínű, hogy a fejlődés/stagnálás nincsen szoros összefüggésben a felsorolt tényezőkkel. A feladatok nehézségi sorrendje (K_3) mindkét részmintában csupán minimálisan változott, ami alapján nincs lényegi átrendeződés a nehézségi sorrendben egy év elteltével.

Az évenkénti fejlődés mértéke (K_4) a vizsgált minta alapján az idősebb korosztályban nagyobb ($\text{gamma}=0,25$), mint a fiatalabbak körében ($\text{gamma}=0,19$). Ha az adatfelvételt mint két keresztmetszeti vizsgálatot tekintjük, akkor az évenkénti fejlődés közel azonos a 4. és a 6. évfolyam ($\text{gamma}=0,27$), valamint az 5. és a 7. évfolyam ($\text{gamma}=0,29$) között. Látható, hogy ezen értékek a longitudinális esetet nézve az idősebb korosztálynál tapasztalt értékekhez állnak közelebb. Éppen ezért a fejlődés mértékét és annak összehasonlítását fenntartásokkal kell kezelnünk, hiszen a gamma értéke nem független a mintától (Csapó, 2002). Mindezt alátámasztja a korábban már hivatkozott nagymintás vizsgálatunk (Gál-Szabó & Korom, 2018), ami alapján a 4. és a 6. évfolyam között egyértelműen alacsonyabb ($\text{gamma}=0,18$) az évenkénti fejlődés mértéke, mint a tanulmányban bemutatott adatok alapján. Feladatonként (műveleteként) nézve a fejlődés mértékét (K_5), a tesztben később szereplő feladatoknál sorra alacsonyabb értékeket látunk. Ez alapján egyértelműnek látszik, hogy a fejlődés mértéke nincsen szoros kapcsolatban a feladatok nehézségével. Mindkét korosztályban a teszt első feladatánál egyértelműen nagyobb arányú fejlődést mutat a gamma értéke, mint a többi esetben. Ennek hátterében akár az is állhat, hogy az első adatfelvételkor találtak először a tanulók ilyen jellegű feladattal (a teszt első adata lévén), míg a második adatfelvételkor már ismerős volt számukra a feladat jellege.

A műveletek megértését vizsgálva a három kritériumváltozó közül (K_6) az elemszám kritériumnál a fiatalabb korosztálynál kettő, az idősebbnél négy, míg az ismétlődésnél egyaránt egy, a felcserélhetőségnél pedig egyetlen feladatnál sem mutatkozik jelentős javulás. A többi esetben közel azonos arányú a romlás és a javulás, sőt öt, illetve két esetben gyakoribb a romlás. Mindkét korosztályban a kritériumoknak való megfelelés szempontjából javulást mutató feladatok között szerepel a teszt első három feladata közül kettő. Ennek hátterében szintén állhat a korábban már említett tényező, a feladatok ismerősége. Azonban ahhoz, hogy ezt biztosan állítsuk, további kutatások szükségesek.

A kritériumoknak való megfelelés változását elemezve további tényezőkkel – a feladat nehézsége, a lehetséges összeállítások száma vagy a feladat kialakításának jellege – nem látunk összefüggést. Feladatonként összesítve a feltételeket (K_7), mindkét részmintában legnagyobb azon megoldások aránya, amelyek ugyanannyi kritériumnak felelnek meg a két időpontban, amit az egy, kettő, illetve három kritériumnyi változás követ. Ezen kívül – néhány esetet leszámítva – a javulás és a romlás arányában nincs különbség. A teljes tesztet nézve (K_8) mindkét korosztályban a válaszok többségénél semmilyen vagy egy-két kritériumnyi változás tapasztalható, illetve valamivel magasabb a több kritériumnak megfelelő tesztmegoldások száma. A feladatok megértésének változásával kapcsolatos eredmények alapján arra következtetünk, hogy bár minimális javulás látható, nincs jelentős spontán fejlődés a vizsgált két korosztálynál egy év elteltével. A két részmintát összehasonlítva, az idősebbeknél több esetben látunk pozitív változást a kritériumoknak való megfelelésben. Lehetséges, hogy ennek oka a korábban már említett, Csapó (2001) által azonosított intenzívebb fejlődési időszakokkal hozható összefüggésbe.

Összegzés

Kutatásunkban a kombinatív gondolkodásnak a 4. és az 5., valamint a 6. és a 7. évfolyamok közötti változásait követtük nyomon. Célunk egy kombinatív gondolkodási teszten és annak feladatain elért teljesítmények, valamint a feladatok feltételeinek megértésében bekövetkező változások vizsgálata volt. Követéses kutatási elrendezést alkalmaztunk két adatfelvételi időponttal, közöttük egy év különbséggel. Mindkét esetben ugyanazt az online mérőeszközt használtuk. Az elemzéseket a fiatalabb korosztály esetében 183, az idősebbeknél 172 tanuló adatain végeztük. A teljesítményeket a Csapó-féle j-index alapján, a műveletek megértését pedig három kritériumváltozó (elemszám, ismétlődés, felcserélhetőség) mentén elemeztük.

Az eredmények alapján a teszten nyújtott teljesítmény számottevően javult mindkét korosztályban, amiből a kombinatív gondolkodás fejlődésére következtetünk. Azonban a teszt feladatait külön tekintve nem minden esetben tapasztalható változás, ami arra utal, hogy a spontán fejlődés nem terjed ki mindegyik kombinatív műveletre. Bár a feladatok feltételeinek megértésében minimális javulás látható, nincs jelentős fejlődés a vizsgált két korosztályban egy év elteltével.

Az eredmények felhívják a figyelmet a kombinatív gondolkodás fejlesztésekor a feladatok feltételeinek megértését segítő támogatás jelentőségére, illetve további kutatásra ösztönöznek a feltételek megértését befolyásoló tényezőkkel kapcsolatban (pl. szövegértés, feladatmegoldási stratégiák). Tanulmányunkban korosztályi szinten foglalkoztunk az egy év alatt bekövetkező változásokkal. Eredményeink felvetik az adatok elemzésének folytatását, a teszt- és feladatteljesítmények, valamint a feladatok feltételeinek megértésében bekövetkező változások tanulói szintű vizsgálatának szükségességét az egyéni fejlődési különbségek feltárása érdekében.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány az Emberi Erőforrások Minisztériuma UNKP-18-3 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült. A kutatást az SZTE Oktatásméleti Kutatócsoport, valamint a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.

Irodalom

- Adey, P., & Csapó, B. (2012). A természettudományos gondolkodásfejlesztése és értékelése. In B. Csapó & G. Szabó (Eds.), *Tartalmi keretek a természettudomány diagnosztikus értékeléséhez* (pp. 17–58). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Batanero, C., Godino J. D., & Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239–252). Amsterdam: IOS Press.
- Bitner, B. L. (1991). Formal operational reasoning modes: Predictors of critical thinking abilities and grades assigned by teachers in science and mathematics for students in grades nine through twelve. *Journal of Research in Science Teaching*, 28(3), 265–274. doi: [10.1002/tea.3660280307](https://doi.org/10.1002/tea.3660280307)

- Cavallo, A. M. L. (1996). Meaningful learning, reasoning ability and students' understanding and problem solving of genetics topics. *Journal of Research in Science Teaching*, 33(6), 625–656. doi: [10.1002/\(sici\)1098-2736\(199608\)33:6<625::aid-tea3>3.0.co;2-q](https://doi.org/10.1002/(sici)1098-2736(199608)33:6<625::aid-tea3>3.0.co;2-q)
- Csapó, B. (1987). A kombinatív képesség fejlesztése az általános iskolában. *Pedagógiai Szemle*, 37(9), 844–853.
- Csapó, B. (1988). *A kombinatív képesség struktúrája és fejlődése*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Csapó, B. (2001). A kombinatív képesség fejlődésének elemzése országos reprezentatív felmérés alapján. *Magyar Pedagógia*, 101(4), 511–530.
- Csapó, B. (2002). A képességek fejlődési ütemének egységes kifejezése: a gamma koefficiens. *Magyar Pedagógia*, 102(3), 391–410.
- Csapó, B., & Molnár, G. (2019). Online diagnostic assessment in support of personalized teaching and learning: The eDia system. *Frontiers in Psychology*, 10(1522). doi: [10.3389/fpsyg.2019.01522](https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.01522)
- Csapó, B., & Pásztor, A. (2015). A kombinatív képesség fejlődésének mérése online tesztekkel. In B. Csapó & A. Zsolnai (Eds.), *Online diagnosztikus mérések az iskola kezdő szakaszában* (pp. 367–386). Budapest: Oktatókutató és Fejlesztő Intézet.
- English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 22(5), 451–474. doi: doi.org/10.1007/bf00367908
- English, L. D. (1993). Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 255–273. doi: [10.2307/749347](https://doi.org/10.2307/749347)
- English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 121–141). Dordrecht: Kluwer. doi: [10.1007/0-387-24530-8_6](https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_6)
- Gál-Szabó, Zs., & Korom, E. (2018). Felsoroló kombinatív feladatok megértésének vizsgálata az elemszám, az ismétlődés és a felcserélhetőség kritériumok alapján. *Magyar Pedagógia*, 118(4), 385–413. doi: [10.17670/mped.2018.4.385](https://doi.org/10.17670/mped.2018.4.385)
- Hajduné Holló, K. (2004). Az elemi kombinatív képesség fejlődésének kritériumorientált diagnosztikus feltárása 4–8 évesek körében. *Magyar Pedagógiai*, 104(3), 263–292.
- Halani, A. (2012). Students' ways of thinking about enumerative combinatorics solution sets: The odometer category. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 59–68). Portland, Oregon: The Special Interest Group of the Mathematics Association of America (SIGMAA) for Research in Undergraduate Mathematics Education.
- Inhelder, B., & Piaget, J. (1967). *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Kosztolányi, J., Pintér, K. Bagota, M., & Dancs, G. (2016). How do students solve combinatorial problems? – Some results of a research about difficulties and strategies of Hungarian students. In Cs. Csikos, A. Rausch & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: PME40* (pp. 115–122). Szeged: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 251–265. doi: [10.1016/j.jmathb.2013.02.008](https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.008)
- Lockwood, E. (2015). The strategy of solving smaller, similar problems in the context of combinatorial enumeration. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 339–362. doi: [10.1007/s40753-015-0016-8](https://doi.org/10.1007/s40753-015-0016-8)
- Mashiach-Eizenberg, M., & Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(1), 15–36. doi: [10.1207/s15327833mtl0601_2](https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0601_2)
- Melusova, J., & Vidermanova, K. (2015). Upper-secondary students' strategies for solving combinatorial problems. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 197, 1703–1709. doi: [10.1016/j.sbspro.2015.07.223](https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.07.223)

A kombinatív gondolkodás longitudinális vizsgálata: a teszten nyújtott teljesítmény és a feladatok megértésének változása 4–5. és 6–7. évfolyamok között

- Molnár, G., & Csapó, B. (2019). A diagnosztikus mérési rendszer technológiai keretei: az eDia online platform. *Iskolakultúra*, 29(4–5), 16–32. doi: [10.14232/iskkult.2019.4-5.16](https://doi.org/10.14232/iskkult.2019.4-5.16)
- Nagy, J. (2004). Az elemi kombinatív képesség kialakulásának kritériumorientált diagnosztikus feltárása. *Iskolakultúra*, 14(8), 3–20.
- Piaget, J. (1970). *Válogatott tanulmányok*. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Poddiakov, A. (2011). Didactic objects for development of young children's combinatorial experimentation and causal-experimental thought. *International Journal of Early Years Education*, 19(1), 65–78. doi: [10.1080/09669760.2011.571001](https://doi.org/10.1080/09669760.2011.571001)
- Simonton, D. K. (2010). Creative thought as blind-variation and selective-retention: Combinatorial models of exceptional creativity. *Physics of life reviews*, 7(2), 156–179. doi: [10.1016/j.plrev.2010.02.002](https://doi.org/10.1016/j.plrev.2010.02.002)
- Szitányi, J., & Csíkos, Cs. (2015). Performance and strategy use in combinatorial reasoning among pre-service elementary teachers. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 4225–4232). Hobart: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Yilmaz, A., & Alp, E. (2006). Students' understanding of matter: The effect of reasoning ability and grade level. *Chemistry Education Research and Practice*, 7(1), 22–31. doi: [10.1039/b5rp90013a](https://doi.org/10.1039/b5rp90013a)
- Zentai, G., Hajduné Holló, K., & Józsa, K. (2018). Új mérőeszközök a gondolkodás vizsgálatára 4–8 éves korban. In O. Endrődy-Nagy & A. Fehérvári (Eds.), *HERA Évkönyv 2017: Innováció, kutatás, pedagógusok* (pp. 175–189). Budapest: Magyar Nevelés- és Oktatókutatók Egyesülete.

ABSTRACT

A LONGITUDINAL STUDY OF COMBINATORIAL REASONING:
CHANGES IN TEST PERFORMANCE AND TASK COMPREHENSION BETWEEN GRADES FOUR
AND FIVE AND GRADES SIX AND SEVEN

Zsófia Gál-Szabó & Erzsébet Korom

Although several Hungarian studies have been carried out on combinatorial reasoning as a reasoning skill (e.g., Csapó, 2001; Nagy, 2004; Hajduné Holló, 2004; Gál-Szabó & Korom, 2018; Zentai, Hajduné Holló, & Józsa, 2018), we are not aware of any longitudinal research. While some of the cross-sectional studies mentioned above are concerned with the development of combinatorial reasoning, changes in the factors affecting performance have not yet been analyzed. Combinatorial reasoning may be looked at from a number of different perspectives; our study uses Csapó's (1988) theoretical model as a starting point. With respect to combinatorial reasoning, the aims of our study are to look at (1) students' progress over time in terms of performance as well as (2) the changes in students' understanding of combinatorial problems observed between Grades four and five and between Grades six and seven. We used a time-series design with two waves of data collection one year apart. The measurement instrument was the same online test with eight enumeration combinatorial problems in both waves. Data were analysed from 183 students from the younger cohort and from 172 students from the older cohort. Performance was characterised by Csapó's (2018) j-index based on the number of correct and incorrect answers. Task comprehension was measured using three criteria: (1) element number, i.e., the number of elements corresponding to the task condition, (2) repetition, i.e., the occurrence of repetitive elements, and (3) reversibility, i.e., the order of selection (Gál-Szabó & Korom, 2018). The results reveal a significant overall increase in test performance ($p < .01$) for both cohorts, which suggests an improvement in combinatorial reasoning. Looking at individual problems, however, shows that this improvement did not apply to all problems (two tasks showed improvement in the younger cohort and five tasks in the older cohort) indicating that spontaneous development does not affect all areas of combinatorial reasoning. With respect to the comprehension of problems, looking at the three criteria separately, no change could be observed for most test items (55.2–87.8%). Looking at the three criteria separately for each task, we found that several solutions met the same number of criteria at the two time points. For the test, the proportion of solutions with no change in the number of criteria met was around 15%, 30% of the solutions met fewer criteria and 40–45% of the solutions met a greater number of criteria. In conclusion, although a minor improvement could be observed in students' comprehension of the principles of combinatorial problems, there was no substantial progress over a year in either age group. Our results point to the significance of assisting students in understanding the principles of combinatorial problems and encourage researchers to carry out further studies concerning the factors underlying the comprehension of these principles (e.g., reading comprehension and problem-solving strategies) and individual differences in development.

Magyar Pedagógia, 119(1). 3–18. (2019)
DOI: 10.17670/MPed.2019.1.3

Levelezési cím / Address for correspondence:

Gál-Szabó Zsófia, Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Doktori Iskola; MTA-SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoport. H-6722 Szeged, Petőfi Sándor sgt. 30–34.
Korom Erzsébet, Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet Oktatáselmélet Tanszék; MTA-SZTE Természettudomány Tanítása Kutatócsoport H-6722 Szeged, Petőfi Sándor sgt. 30–34.