MAGYAR PEDAGÓGIA
103. évf. 2. szám 229–261. (2003)

A MATEMATIKAI KÉPESSÉG ÖSSZETEVŐINEK VIZSGÁLATA ÉS KAPCSOLATA AZ INTELLIGENCIÁVAL

Vincze Szilvia
Debreceni Egyetem, Gazdaságelemzési és Statisztika Tanszék

A matematikáról általánosságban

„Első pillantásra hihetetlennek tűnik, hogy egy olyan tiszta és érzelmektől mentes tudomány, mint a matematika, bármi használhatót tudna mondani arról a zűrzavaros, szervezetlen és kiszámíthatatlan világról, amelyben élünk. – Szerencsére azt tapasztaljuk, hogy amikor megértünk valamit, ami korábban titokzatosnak tűnt, a dolgok mögött rend, formák és józan ész húzódnak meg."

– *B. H. Rivett*, idézi *Sydsæter* és *Hammond* (2000. 323. o.) –

Több mint kétezer éve minden művelt ember szellemi fegyvertárához tartozik némi jártasság a matematikában. A diszciplínával kapcsolatban mindenki őriz magában valamilyen emléket; a kialakított vélemények igen nagy eltérést mutathatnak. Szinte senki sem viszonyul semleges módon a matematikához. Mindenki foglalkozik vele bizonyos ideig, mert iskolarendszerünkben az egyik leghangsúlyosabb tantárgy. Tanulmányaink befejeztével is sokszor kerülhetünk kapcsolatba vele közvetetten a technikai segédeszközöktől kezdve a korszellem néha csak finoman érzékelhető, néha szembeötlő árnyalatáig (*Kupás*, 1997). A tudománnyal kapcsolatos egyik legáltalánosabban elfogadott nézet szerint ez olyan szigorú szabályokra épülő tárgy, amelyet az emberek többsége az oktatásban szereplő tárgyak rendszerében a legnehezebben elsajátítható kategóriába sorol. Sokan egy külön világként kezelik, amely az emberek többsége számára érthetetlen és megközelíthetetlen, csak néhány ember remélheti, hogy valaha is megérti ezt a nagyon absztrakt tantárgyat. Sokak számára szemléletmódja idegen, a problémái érdektelenek, ugyanakkor mások érdekesnek és lényegesnek látják mindezeket.

A matematika a maga elvontságával, egzaktságával, szilárd, axonometrikus formájával az összefüggések és szabályok kimeríthetetlen tárháza, amely kevés ismeret birtokában is kiváló terepe lehet a szellemi tevékenységnek (*Gyarmathy*, 2001). Téves következtetésekhez jutnánk azonban, ha azt gondolnánk, hogy az ember kész matematikai képességgel születik. Az öröklés bár meghatározza a megismerő folyamatok bizonyos sajátosságait, de az adott potencialitásokból csak a tárgyakkal, az eszközökkel, a technikával, a kultúrával való aktív kapcsolat révén alakul ki az analizáló és szintetizáló, az elvonatkoztató és általánosító stb. tevékenység képessége, melyek alapját adják azon képesség kialakulásának, hogy a változó viszonylatában az állandó megragadására legyünk képesek. Ha ezek a feltételek adottak, akkor a matematikával való aktív kapcsolat révén megindulhat a matematikai képesség struktúrájának kialakulása (*Rosca* és *Zörgő*, 1973). Ha ismerjük a struktúra összetételét és fejlődésének dinamikáját, akkor lehetőségünk nyílik arra, hogy a matematikai képesség alakulását megfelelően befolyásolhassuk és hozzájárulhassunk tökéletesebb strukturálódásához.

Hogyan lehetne azonosítani a matematikából tehetséges gyermekeket? Egyáltalán ki tekinthető matematikai tehetségnek? Vannak-e olyan összetevők (képesség-komponensek), amelyek kifejezetten a matematikai képesség összetevőinek nevezhetők? Hogyan lehetne feltérképezni a matematikai képesség struktúráját, összetételét? Az utóbbi kérdésre a válasz talán kézenfekvőnek tűnik: matematikai feladatokon és problémákon keresztül. Aki a matematika titkát a problémák táján keresi valószínűleg nem nagyot fog tévedni. A matematika bármely ágához tartozó feladat elemzése hozzájárul a feladatok megoldásához szükséges matematikai gondolkodás természetének megismeréséhez.

Elméleti áttekintés

„... bámulatos és mély titok, miért rendelkezik az emberi értelem kivételes matematikai képességekkel...”

– *P. Davies* (1995. 165. o.) –

A matematikai gondolkodás különböző megközelítései

Ha távolról közelítünk a matematikához, akkor azt a tevékenységet, amely általa és benne teljesedik ki hasonlíthatjuk olyan agytornához, szellemi erőfeszítéshez vagy játékhoz, amelyben lemérhetjük képességeinket, kipróbálhatjuk saját találékonyságunkat. A játékra általában mindenki szívesen vállalkozik. A játék többnyire mindenki számára valamiféle sajátos bűvkörrel bír, amelynek talán legfontosabb oka, hogy benne el tudjuk felejteni korlátainkat, élvezzük, hogy más szabályok uralkodnak, mint amelyek kényszerítő erővel vannak jelen mindennapjainkban. A játékban a szabályok emberi mértékűek, ránk szabottak. Szabadon mozoghatunk benne, tőlünk függ, hogy a határokat hol húzzuk meg, akármikor kiléphetünk belőle minden kockázat és felelősség nélkül. Bár a matematika különös terepe a játéknak – hiszen nagyfokú szabadsággal rendelkezünk: szabadon tehetünk fel újabb és újabb kérdéseket, félretehetjük, akármikor elővehetjük, sajátos stratégiákat alkalmazhatunk, véleményezhetjük, hogy valami tetszik-e számunkra vagy sem –, ám gyakran érezhetjük, hogy amivel játszunk az nem feltétlenül csak tőlünk függ. Hordozza annak a világnak a vonásait, amit talán éppen felejteni szeretnénk. Egy feladvány megoldását csak addig tekintjük játéknak, amíg a válasz mindenki számára kézenfekvő, ameddig kényszerítő erők nem lépnek fel. Ha komolyabbra fordul a dolog, ha már valamiért erőlködnünk kell, vagy ha megsejtjük, hogy bármi más módon köze van a valósághoz, akkor az már más, sokan kiszállnak a játékból, ha nem feltétlenül szükséges, akkor nem akarnak vele különösképpen foglalkozni. Gyakran tagadják, hogy értelmes dolog lenne a matematikai lényeget látni a világban, s különösnek, érthetetlennek, erőltetettnek érzik ezt a nézetet (*Kupás*, 1997).

Az egyének nagyon különböznek egymástól a matematikai megértés képességében, amely képesség az évek múlásával jelentősen változhat. Néhány gyermeknek már a kezdeteknél is nagy nehézségei lehetnek, míg mások eljutnak egy bizonyos szintre, majd leromlanak. Természetesen vannak olyanok is, akik nagyon tehetségesek, és úgy tűnik, hogy a képességük „végtelen" annak kibontakoztatása szempontjából. Mi okozhatja ezeket a különbségeket? Genetikai okokkal magyarázhatók ezek a különbségek, vagy más okai vannak? Miért van az, hogy némelyek egy bizonyos pont után már nem képesek matematikai módon gondolkodni? Melyek azok a képességek, készségek, amelyek a matematikai gondolkodás alapját képezhetik, vagyis a matematikai képesség összetevőinek nevezhetők? *Sternberg* (1998) szerint, ha valakinek az a célja, hogy a matematikai gondolkodás megértése céljából egy feltételrendszert állítson össze – amelyben az összetevők szükséges és elegendőek a konstrukció megértéséhez –, csalódott lesz. A matematika ugyanis nem egy klasszikusan definiált elmélet, amelyben a szükséges és elegendő feltételek jól meghatározottak; nincs elfogadott nevezéktan arra vonatkozóan, hogy melyek azok a képességek, amelyeket matematikainak nevezhetünk (*Csíkos* és *Dobi*, 2001).

A matematikai gondolkodásnak számos megközelítése ismert. Az egyik és talán legkidolgozottabb modell, az úgynevezett *prototípus modell* szerint a matematikai gondolkodásnak nincsenek jellegzetes összetevői, inkább csak karakterisztikus vonásai vannak, amelyek a szerkezetre nézve jellegzetesek. Ezt a modellt *Rosch* (1973, 1978) adta meg, és a későbbiekben *Medin* és *Smith* (1984) dolgozta ki. Az még nem egyértelmű, hogy a matematikai gondolkodásnak egy prototípusa van-e, valószínűsíthetően nemcsak egy ilyen prototípus létezik, hiszen a matematikai gondolkodás eltérést mutathat a matematika különböző területein, vagyis feltételezhetően más képességek szükségesek például az analízis, más az algebra és megint más a statisztika területén. Az összetett prototípus léte látszik a legvalószínűbbnek (*Sternberg* és *Horváth*, 1995), ennek magyarázata lehet az, hogy akik kiváló statisztikusok, nem feltétlenül a legkiválóbbak az algebra területén, és persze mindez megfordítva is igaz.

A karakterisztikus vonások jellemzőit nagymértékben befolyásolja az, hogy a problémát milyen oldalról közelítjük meg. Mielőtt rátérnénk a számunkra legfontosabb két megközelítési módra, a matematikai és pszichológiai (pszichometriai) megközelítésekre, két másik, az antropológiai és a pedagógiai megközelítés jellemzőt vizsgáljuk meg. A *kultúr-kognitív pszichológusok* azt akarják meghatározni, hogy a gondolkodás egyes elemei a kultúra mely komponenseivel vannak kapcsolatban. Az, hogy milyen matematikát alkotunk meg, bizonyossággal függ a kulturális tényezőktől is, ugyanakkor a matematikai gondolkodást – bárminek legyen is az tekinthető –, semmiképpen nem tekinthetjük kulturális eredménynek. Az egyes nemzetek között lényeges stílusbeli különbségek vannak, más elveket részesítenek előnyben a franciák, mint az angolok; néhány afrikai népnél például a miénktől jelentős mértékben eltérő számfogalom van, és a sor tovább folytatható. A világkép azonban bármelyik kultúráról is legyen szó, mégis kerek és egész. A kínai kultúrában például, ahol a matematika tanulása és a problémamegoldás során az abakuszt használják, a tanulók más képességei fejlődnek ki, mint azokban a kultúrákban, amelyekben a számoláshoz a papír-ceruza módszert használják. Más képességeket sajátíthatnak el azok a diákok, akik olyan kultúrában élnek, ahol az említett területeken a számoló- és számítógépekre hagyatkoznak elsősorban (*Sternberg*, 1998). A kultúrák közötti eltérések vélhetően a nyelv logikájában rejlő különbségnek is köszönhetők. Ez a fajta megközelítés megmutatja, hogyan változhat egy konstrukció természete térben és időben. A *kognitív oktatáspszichológus* az oktatás olyan alapelveit kívánja meghatározni, amelyek a matematika oktatása és tanulása számára relevanciával bírnak. A mentális folyamatok megismerésének egyik módja lehet fejlesztésük, majd a megfelelő következtetések levonása – mit volt könnyebb és mit volt nehezebb megtanítani (*Brown*, 1974, 1975; *Brown* és *Barsclay*, 1976). A pedagógiai megközelítés kitágítja a matematikai gondolkodás prototípusait, beleértve azokat a változásait, amelyek túlmutatnak a tisztán kognitív változásokon. A prototípust ha egészként tekintjük, annak részévé válik a hozzáállás, a kapcsolatok és a szociális kötöttség. *Bransford* és munkatársainak kutatásai (1988) megmutatták, hogy a matematikai gondolkodás és a tanulás erősen függ a kontextustól. Azok a gyerekek messze jobban tanulják a matematikát, akik számára a probléma valódi problémát tükröz, vagyis jelentéssel és valódi tartalommal bír. *Bransford* és kollégái akkor érték el a legnagyobb sikereket a matematika oktatásában, amikor a diákokkal kontextusba ágyazott problémákat oldattak meg. Ezek a problémák már alig hasonlítottak az oktatásban alkalmazott matematikai tananyagra.

A matematikai megközelítés

A legtöbb ember számára a matematika az iskolai tananyagban szereplő anyagrészekről kialakított impressziókból és a tanárral való interakcióból áll össze (*Dreyfus* és *Eisenberg*, 1998). Az iskolában tanított matematika szempontjából nem releváns az a kijelentés, hogy a matematikát felfedezik vagy feltalálják, illetve az a kijelentés sem, hogy logikáját tekintve arisztotelészi vagy valamilyen más logikára épül. A tananyag egyszerűen összefoglal, miközben fogalmak és különböző problémák elsajátítását követeli meg. Tág értelmezés szerint a matematika nem más, mint valamiféle probléma megoldása. A matematika különböző ágait figyelembe véve (geometria, topológia, analízis, kombinatorika, logika, számelmélet stb.) rögtön szembetalálkozunk annak sokszínűségével, a feladatok különbözőségével. Mindez a sokszínűség az adott probléma nehézségére és struktúrájára vonatkozik. Mindenki tapasztalhatta tanulmányai során, hogy a feladatok közül azok bizonyultak nehezebbeknek, amelyeknél a feladat megoldási menete nem magától értetődik. Vannak olyan problémák amelyek rutinszerűek, a megoldója felismeri, hogy milyen eljárás alkalmas a probléma megoldásához és képes azt helyesen alkalmazni. Példaként említhető a következő feladat: $(40+60)-(20/5)=?$. A legtöbb iskolázott felnőtt számára a feladat megoldása nem jelent problémát, a megoldást könnyen ki tudják számítani. A megoldó képes a probléma reprezentálására és végrehajtására: tud összeadni és osztani, majd az eredményeket ki tudja vonni egymásból. Az ilyen jellegű problémák nem tekinthetők valódi problémáknak abban az értelemben, hogy a megoldónak a megoldáson nem kell hosszasan eltöprengenie. *Maher* és *Martino* (1998) bár meghatározónak tartják az alapvető matematikai készségek (például számolási készség) tanulmányozását is, ám a jobb matematikai teljesítmény kulcsának a matematikai problémák megértését tekintik. Problémáról akkor lehet beszélni (általános értelemben), amikor adott a cél, de nem ismerjük a célhoz vezető utat. Az alábbi feladat egy olyan problémát reprezentál ami nem rutinszerű, a megoldás nem triviális, vagyis a megoldó nem tudja azonnal megtalálni a megoldást: *6 millió forintért vásároltunk egy lakást, amelyet később 7 millió forintért eladtunk. Később visszavásároltuk 8,5 millióért és ismét eladtuk 9 millió forintért. Mennyi hasznunk származott?*

A matematikai problémamegoldás atyjának *Pólya György*öt tekinthetjük, akit matematikusi pályafutása közben folyamatosan foglalkoztatta az, hogyan gondolkodnak a matematikusok, hogyan fedeznek fel dolgokat és hogyan oldják meg a problémákat. *A gondolkodás iskolája* (*Pólya*, 1957) című művében *Pólya* elutasítja azt a nézetet, amely szerint a problémamegoldásnak létezne szisztematikus elmélete, véleménye szerint a problémamegoldás művészet. A problémamegoldás további tanulmányozása során egyetértés mutatkozik abban, hogy a tanulók gyakran kidolgozott példákon keresztül induktívan tanulnak (*Anderson*, 1993; *Simon* és *Zhu*, 1998). Az induktív gondolkodás mellett, az analógiás gondolkodás is kitűntetett szerepet kapott a matematikai gondolkodás vizsgálatának folyamatában. Egy új probléma analógián keresztül történő megoldása során a tanuló egy hasonló problémát hív elő, majd ezek után a megoldás érdekében a két probléma közötti leképezést próbálja megvalósítani (*Holyoak* és *Thagard*, 1989). A problémamegoldó gondolkodás további vizsgálatai a sémák használatát nevezik meg a teljesítmény egyik fontos összetevőjeként (*Schoenfeld*, 1988).

Arra a kérésre tehát, hogy mi a matematika nehéz válaszolni. Olyan dologról van szó benne, amit maga az ember gyártott, vagy csak felfedi egy magasabb istenség munkáját? A logika vagy az intuíció dominál benne? Az absztrakciót magában rejti, vagy ez csak kommunikációjának közvetítő eszközeként szolgál? Számos kérdés fogalmazható meg, amely alapján úgy tűnik nincs minderre megnyugtató és egységes válasz, a szemléletmódok és a különböző megközelítések más és más aspektusból láttatják és világítják meg a kérdés problematikáját. De a probléma talán könnyebben közelíthető meg, ha azt kérdezzük, hogy mi jellemzi a matematikai gondolkodást.

A matematikában két gondolkodási iskola különíthető el. Az egyik szerint a matematikai érvelés sokkal több mindennel foglalkozik, mint az egyedi problémák megoldásához szükséges gondolatsémákkal. Egy olyan gondolkodásmódot foglal magába, amely az esztétika szubjektív mércéjével mérhető. Sokan (pl. *Hardy*, 1940; *Halmos*, 1968; *Kupás*, 1997) hangsúlyozzák az esztétikai tényezők matematikában betöltött szerepét. A matematikában tehetünk néhány lépést mechanikusan, de a megértés elengedhetetlenül szükséges ahhoz, hogy a lényegi részhez eljuthassunk. A megértés érzése belső gazdagsággal bíró, színes élmény. Az esztétikum által gyakran megértünk valamit, még akkor is, ha sokszor nem is tudjuk pontosan kifejezni, hogy valójában mi is az (*Kupás*, 1997). Amikor azonban az esztétikát is figyelembe vesszük, a matematikai gondolkodás értékelése bonyolulttá válik. Ezen nézőpont szerint egy matematikai struktúrához vagy megoldáshoz nem elég megoldani a problémát, kiszámítani a feladat megoldását, hanem mindezt elegánsan is kell tenni. A matematikai gondolkodás sokkal többnek tekinthető, mint matematikai problémákat kezelő és megoldó képességnek, szoros összefüggést jelez az esztétikummal (*Courant* és *Robbins*, 1966; *Halmos*, 1968). Az esztétikumot felfoghatjuk úgy is, mint amin keresztül feltárulnak a rejtett mélységek, ami több, mint a megszokott részletek megnyilvánulása (*Kupás*, 1997). A másik iskola nézőpontja szerint a tanterv és a tanítás nem alkalmas arra, hogy az emberek többsége fogékony legyen a matematikai gondolkodásra. Állításuk szerint a diákok nagy részének – az alacsony képességszintjük következtében – a legegyszerűbb problémák is nehézségeket jelentenek. Ezért el kell felejteni az eleganciát, mindaddig, amíg a gyerekek egyszerű módszerekkel sem képesek problémákat megoldani. Az ilyen problémák száma azonban végtelennek tűnik (*Mason, Burton* és *Stacey*, 1982; *Orton*, 1992; *Gillman*, 1994; *Selden, Selden* és *Mason*, 1994).

A két nézőponton belül számos kapcsolódási pont található. A matematikai gondolkodás kritikus elemei az analógiával, a struktúrával, a reprezentációval, a vizualizációval és a gondolkodás reverzibilitásával adhatók meg. Feltételezhető azonban, hogy a matematikai gondolkodás több, mint ezen különböző oldalak összessége.

a) Analógiás gondolkodás

A matematikai gondolkodási képesség fejlesztésének egyik nagyon fontos kulcsa, hogy az ember megtanuljon analógiákat keresni. *Csapó Benő* és *Korom Erzsébet* (1998) szerint az analógiás gondolkodás különösen fontos szerepet játszik a megértésben és a tudás új helyzetekben való alkalmazásában, felhasználásában. Az analógiák keresése és megtalálása éppúgy tanulható, mint az, hogy az ember egy problémával találkozva kérdéseket tegyen fel önmagának. *Pólya György* mestere volt a gondolatok analógiákkal való szemléltetésének. Úgy vélte, ha a probléma megadása szigorúan kötött, akkor azon lazítani kell: először meg kell oldani az egyszerűbb problémát, aztán intuitív módon használni kell azt a komplexebb esetre. A háromdimenziós problémáknak nagyon gyakran van kétdimenziós megfelelője, a síkbeli problémák pedig legtöbbször visszavezethetők az egyenesre. Először mindig az egyszerűbb eseteket kell megoldani, és ennek segítségével lehet áttérni az egyik problémáról a másikra, amellyel meg lehet tanulni az analógiakeresés heurisztikáját.

b) Struktúra

A struktúra a matematika egyik fő alkotóeleme. A struktúra választja el a matematikát a többi természettudománytól. A matematikában a tényeknek kevésbé van jelentősége, sokkal fontosabbak a tények közötti kapcsolatok, a kapcsolatok közötti kapcsolatok és ezáltal a struktúra. A matematikában igazolható ténynek felel meg a struktúra és az összefüggés (*Courant* és *Robbins*, 1966). A struktúra meghatározásának képessége a matematikai gondolkodás központi részét képezi. A struktúra elárulja, mit lehet és mit nem lehet tenni, ezáltal fejleszti az egyén ítélőképességét. Felismerése egy adott problémában, alkalmazása egy szituációra növeli a problémamegoldás hatékonyságát és rugalmasságát. Különböző problémák esetén ugyanazon struktúra felismerése, a probléma analógiás megoldását jelenti. A struktúra segítheti az emlékezést, a rendszerezett tudást ugyanis könnyebb felidézni, mint a rendezetlen, strukturálatlan tudást (*Dreyfus* és *Eisenberg*, 1998).

c) Reprezentáció

Bármilyen matematikai állítás, fogalom vagy probléma kifejezéséhez szükséges annak reprezentálása. A reprezentáció történhet formálisan vagy informálisan, vizuálisan vagy verbálisan, explicit vagy implicit módon. Minden reprezentáció kifejezi az információ egy részét, de sohasem képes az egész megragadására: bizonyos aspektusokat hangsúlyoz, míg másokat a háttérbe szorít. Ennek ellenére a matematikai gondolkodás szempontjából relevanciája tagadhatatlan, főleg ha egynél több reprezentációt használunk párhuzamosan és azokat össze is kapcsoljuk. A matematika ereje – a struktúra mellett – a reprezentációtól független tulajdonságokban és a reprezentációk közötti kapcsolatokban is megmutatkozik.

d) Vizuális gondolkodás

A vizuális-téri képesség kifejezés alatt a két- és háromdimenziós alakzatok észlelésének és az észlelt információknak a tárgyak és a viszonylatok megértésére, valamint a problémák megoldására való felhasználásának képességét értjük. Ez a meghatározás magába foglalja a téri ingerek kódolását, felidézését, összehasonlítását és átalakítását lehetővé tevő, egymással összefüggő képességek sorát (*Salat* és *Séra*, 2002). A matematikában gyakran és egyre nagyobb értékkel felruházva használják a vizualizációt. Nemcsak a matematikusok számára lehet jelentős a képi szemléltetés, hanem a hétköznapi matematikai gondolkodásban is sokoldalú eszközként szolgálhat. Kutatások bizonyítják (pl. *Bondesan* és *Ferrari*, 1991), hogy a gyengébb képességű tanulóknál jó segédeszköz lehet a képi szemléltetés egy probléma megoldására. A matematikai gondolkodásban a vizualizáció a flexibilis gondolkodásmód eszközeként szolgál.

e) A gondolkodás megfordíthatósága (reverzibilitás)

Ez egy olyan képesség, amely csak gyakorlással alakítható és fejleszthető. A gondolkodás megfordíthatósága velejárója a jó matematikai gondolkodásnak, amely elsősorban a flexibilitáson keresztül érezteti jelentékeny hatását.

Pszichológiai és pszichometriai megközelítés

A matematikai képességek problémája a pszichológusokat már az évszázad eleje óta foglalkoztatja. A legalaposabb és legsokoldalúbb elemzést *Krutetki* (1968) végezte. Feltárta azokat a sajátosságokat, amelyekkel a matematikában jó teljesítményt nyújtó tanulók gondolkodása jellemezhető: (a) általánosítás képessége (adatokra és relációkra vonatkozóan); (b) a matematikai következtetések és az adatokkal kapcsolatos cselekvésmozzanatok összevonásának, rövidítésének képessége; (c) a gondolkodási folyamatok flexibilitása; (d) érthető kifejezésre, egyszerűsítésre és gazdaságosságra való törekvés; (e) a matematikai következtetések megfordításának képessége (inverzió); (f) önkontroll.

Krutetki szerint a jó matematikusokra az jellemző, hogy nemcsak a matematikai problémákat, de más problémákat is matematikus módjára látnak és kezelnek. Monográfiájában a matematikai képesség néhány egyéni, típusos és életkorra jellemző sajátosságairól fogalmaz meg megállapításokat. Az egyénnel kapcsolatban a *Krutetki* által vázolt struktúra négy fő komponenséhez kapcsolódva a következő kérdéseket lehet feltenni: Milyen fejlett az absztraháló képessége? Milyen fejlettségi fokú az általánosítás, a reverzibilitás és a lerövidítés képessége? Ezek a folyamatok általában három szinten valósulnak meg: a verbális-logikus gondolkodás, a közvetett szemlélet és a közvetlen szemlélet szintjén.

Ennek alapján *Gullasch* (1971) egy hatszintű sémát konstruált, melynek minden egyes szintje egy-egy fejlődési szintet képvisel. Ez a hatszintű séma a következőképpen épül fel: (1) a megismerő tevékenység verbális-logikus szintjén megnyilvánuló tökéletes absztrahálás; (2) főként az absztrakt-verbális szinten, részben pedig a közvetlen szemléletesség fokán megvalósuló tökéletes absztrahálás; (3) a közvetett szemléletesség szintjén megvalósuló tökéletes absztrahálás; (4) túlnyomóan a közvetett és részben a közvetlen szemléletesség fokán megvalósuló tökéletes absztrahálás; (5) tökéletes absztrahálás a túlnyomóan közvetlen szemléletesség szintjén; (6) egyetlen szinten sem lép fel teljes absztrahálás. Ezt a skálát nemcsak az absztrahálásra, de a másik három képességre is lehet alkalmazni: az általánosításra, az inverzióra, valamint a sűrítésre. Speciális próbák segítségével meg lehet állapítani, hogy a vizsgált személy teljesítménye a fenti skála melyik szintjének felel meg, s az így kapott eredményekből következtetni lehet az egyén matematikai képesség-struktúrájának vonásaira.

A matematikai képességgel kapcsolatban *Skemp* (1971) egy igen érdekes dologra hívta fel a figyelmet, mely szerint a matematikai képesség strukturálásában az úgynevezett reflektív intelligencia is jelentős szerepet játszik. Az értelmesség ezen formája lehetővé teszi, hogy saját fogalmainkat és mentális műveleteinket észleljük, illetve hatást gyakoroljunk rájuk. Ez a rendszer lehetőséget ad arra, hogy felfogjuk a fogalmaink és műveleteink közötti relációkat, valamint ezeket a relációkat és az emlékezetből felidézett, vagy a külvilágból kapott információkat számon tartva cselekedjünk.

A fentiekben ismertetett kutatások mellett a matematikai képességet faktoranalitikus módszer segítségével is vizsgálták. A pszichológiai képességek elméletében domináns szerepet játszik a gondolkodási képességek leírására precíz terminológiát megadó faktoranalitikus modell. *Carroll* (1993) nevéhez fűzhető a matematikai gondolkodás prototípusos vonásainak pszichometriai értelmezése. Szintetizálta a közel félévszázados a kognitív képességek rendszerének feltárását célozó faktoranalitikus kutatásokat. Sok ezer kognitívnek minősített feladat faktoranalitikus elemzését végezték el, amely eredményeként az összetartozó feladatokat faktorok alá csoportosították. Ezeket a faktorokat faktoranalitikus elemzésnek vetették alá, amely a faktorok hierarchikus rendszerét eredményezte (*Nagy*, 2000). *Carroll* ezen kutatások szintézisként egy hierarchikus háromszintű modellt állított fel, amelyben a kognitív képességeket általános, átfogó és szűk hatókörű faktorokba sorolta. A hierarchia csúcsán, a legfelső szinten, az általános „*g*" faktor van. Ezt az általános faktort intelligenciával kapcsolatos kutatásai során már *Spearman* is feltételezte (1904, 1927), és ő nevezte ezt el „*g*"-nek. Úgy gondolta, hogy ez az általános faktor olyan kognitív műveletekben van jelen, ahol meg kell érteni valamit; különböző ingerek közötti kapcsolatot illetve dolgok közötti összefüggéseket kell megtalálni; illetve ki kell következtetni. Általánosan elmondható, hogy mindenféle kognitív aktivitás feltétele, alapja ez a komponens. A matematikai tudás szintmérő tesztek eredményei szoros összefüggést mutatnak a „*g*"-vel. Az alacsony IQ-jú (alacsony „*g*"-jű) embereknek már az egyszerű matematikai műveletek is nehézséget jelentenek (*Geary*, 1993, 1994). A második szinten találhatóak az átfogó képességek (*Carroll*, 1993): (1) folyékony (fluid) intelligencia, (2) kristályos intelligencia, (3) tanulás és memória általános faktora, (4) vizuális észlelés, (5) auditív észlelés, (6) a visszaidézés képessége, (7) tágabb értelemben vett kognitív sebesség, (8) az információfeldolgozás sebessége. Az első szinten találhatók a szűk hatókörű faktorok (kb. 65 db), amelyek már meglehetősen speciális képességeket reprezentálnak. A kognitív képességek ezen rendszerébe beilleszthető a matematikai képességek struktúrája (*Carroll*, 1998). *Carroll* szerint számos elemi szintű képesség összefüggésbe hozható a magas szintű matematikai teljesítménnyel, ezért a matematikai képesség összetevőinek tekinthetők. *Carroll* modellje alapján a matematikai gondolkodás egyik faktora a fluid intelligencia. Ez olyan általános képességet fejez ki, ami komoly szerepet játszik a következtetéses feladatok megoldásában, egy számsorozat szabályának felismerésében, egy sorozat kiegészítésében – amelyek megoldása induktív vagy deduktív gondolkodást igényel –, illetve mennyiségekkel kapcsolatos problémák megoldásában. Másik lényeges faktor a kristályos intelligencia, ami alá besorolt faktorok főként a nyelvi képességekkel függnek össze: szövegértés, nyelvi fejlődés, olvasási sebesség stb. tartozik ide. Harmadik kulcsösszetevőnek tekinti a tanulás és memória általános faktorát, ami a memória terjedelmét (rövid időre mennyi dolgot tud megjegyezni), és az „értelmes memória" faktorát (hosszabb időre kell megtanulni értelmes dolgokat) öleli át. Az utolsó, negyedik összetevő, ami a matematikai gondolkodásban döntő szerepet játszhat az általános vizuális észlelés. Ezt például olyan feladatok határozzák meg, mint egy test és kiterített hálója közötti összetartozó oldalak megtalálása. A többi második szinten lévő kognitív képességekről nem mondható el az, hogy különösebben meghatározó szerepet játszanának a matematikai gondolkodásban.

A századunk második felében kibontakozó kognitív pszichológia laboratóriumi kísérleteinek eredményei a kognitív képességekkel kapcsolatos faktoranalitikus szemléletmódtól eltérő értelmezésre adnak lehetőséget (*Nagy*, 2000). Amíg a képességek faktoranalitikus kutatása makroszintű megközelítésnek tekinthető, addig a gondolkodási képességek komponenseinek (kognitív rutinok, képességek, ismeretek) vizsgálata mikroszintűnek mondható (*Nagy*, 1998). *Nagy József* más szemszögből világítja meg a kognitív képességeket. *Nagy* (1998) szerint a kognitív kompetencia öröklött és tanult információkezelő komponensek komplex rendszere. A rendszer komponensei közé sorolja a rutinokat, készségeket, képességeket, motívumokat és ismereteket. *Nagy* modelljében a kognitív rutinok olyan pszichológiai komponenseknek tekintendők, amelyek funkciója az információfeldolgozás. A kognitív rutinok párhuzamosan megosztott hálózatba szerveződnek, működésük tudatosan nem befolyásolható. Ezekből a kognitív rutinokból bontakoznak ki az egyre komplexebb és egyre bonyolultabb funkciókat szolgáló kognitív képességek, amelyek feladata az, hogy elősegítsék az egyed aktivitásának eredményességét. Működésük megvalósulásának feltétele, a rutinok egymást követő aktivizálódása. *Nagy* modelljében a készségeket négy csoportba osztja: (1) merev kognitív készség (pl. szó szerint betanult szövegek); (2) ciklikus kognitív készség (pl. szortírozás, sorképzés, számlálás); (3) rugalmas kognitív készség (pl. besorolás, szelektálás); (4) komplex kognitív készség (pl. következtetéses gondolkodás, mértékváltás). Modelljében ezek a kognitív készségek meghatározott rendszert alkotnak. A kognitív rutinok egyszerű készségekké, az egyszerű készségek komplex készségekké szerveződnek. A legátfogóbb rendszer a kognitív kompetencia, amely hierarchikus komponensrendszerként képzelhető el. A jelenleg körvonalazódó új elméletek alapján a matematikai gondolkodásban (is) szerepet játszó képességek többszintű, hierarchikus komponensrendszereknek tekintendők (*Nagy*, 1999).

A matematikai tehetség

„A matematikus életének értéke, bármiféle gyakorlati norma szerint ítéljük is meg, a nullával egyenlő; és mindenképpen jelentéktelen a matematikán kívül. Egyetlen esélyem van csupán arra, hogy megmeneküljek attól, hogy tökéletesen jelentéktelennek ítéljenek meg, éspedig az, ha úgy fogják ítélni, hogy olyan valamit alkottam meg, amely érdemes a megalkotásra."

– *G. H. Hardy* (1940. 25. o.) –

Közismert dolog, hogy a matematika a korán jelentkező képességek közé tartozik (*Czeizel*, 1997), megmutatkozásának átlagos ideje a zenei tehetség jelentkezéséhez képest valamivel korábbra tehető (*Gyarmathy*, 2001). Deduktív természetével, nagyfokú függetlenségével a matematika kínálja a legmeredekebb ösvényt a magasba: talán gyorsabbat, mint a zene. A legtöbb matematikai tehetség már húszéves kora előtt komoly tudományos eredményeket ér el (Pascal, aki tételét tizenhat éves korában közölte nem az egyetlen példa); majd 40 éves kor felett már nem jellemző kiemelkedő matematikai alkotások létrehozása (*Gyarmathy*, 2001).

A kiváló matematikai gondolkodású gyermekek már igen korán nagy érdeklődést mutatnak a számok iránt. Élvezettel számolnak, kiváló számolási képességükkel kitűnnek társaik közül. A számlálás ciklikus kognitív képességnek tekinthető, melyben a ciklikusság alatt azt értjük, hogy a készséget felépítő elemek automatizálódnak, úgynevezett kognitív rutinokká szerveződnek és bizonyos komponensei ismétlődnek (*Józsa*, 2000). A jó számolási képességgel rendelkező gyerekek rengeteg időt töltenek számolással, nagyon sok művelet eredményét őrzik emlékezetükben és ezeket a különböző feladatoknak megfelelően képesek mozgósítani. A kiváló számolási képesség azonban még nem jelenti azt, hogy valakiből valóban igazi matematikai tehetség válik.

Poincaré (1952) a matematikai tehetség szempontjából két típust különböztetett meg: a logikus és az intuitív típust. Az első logikai oldalról közelíti meg a problémát, míg a második inkább a megérzéseire támaszkodik. Hasonló következtetésre jutott *Reichel* (1997) is, aki bár más megnevezéssel, de ugyanezt a két típust vázolta fel. Az elsőnek az „elmélet-alkotó" nevet adta, a másodiknak pedig a „problémamegoldó"-t. Az első, ha találkozik egy problémával elméleteket alkot, megragadja a jelenséget, a problémához kapcsolódva leírja a szükséges fogalmakat; logikai hierarchiát kialakítva a racionális gondolkodás jellemzi. A másik típus a problémával szembesülve egyszerűen ráérez valamire, egy meglepő dolgot felfedezve jut el a megoldáshoz. A két típusnak egzakt módon való elkülönítése azonban nem lehetséges, mert nagyon ritka az a matematikus, aki csak az egyik típusba tartozna, a határok elmosódnak (*Gyarmathy*, 2001).

A matematikai tehetségnek igen sok összetevőjét tárták fel a kutatások (pl. *Heller, Mönks* és *Passow,* 1993; *Reichel*, 1997). Bár a matematikai tehetség általános meghatározásában nincs konszenzus, de vannak olyan tulajdonságok, amelyek a kiemelkedő képességek jelzéséül szolgálhatnak (*Gyarmathy*, 2001):

- A matematikával kapcsolatban fáradhatatlan, keresi a problémákat.
- A problémát gyorsan formalizálja és általánosítja.
- Hasonló problémák esetén a közbülső logikai lépések kihagyásával reagál.
- Kitartás és feladatelkötelezettség jellemzi.
- Csodálatba ejtik a tények, a formulák.
- Kiváló emlékezete van a számokkal, formulákkal, viszonyokkal, megoldási módszerekkel stb. kapcsolatban.
- Gondolkodásmódja flexibilis; gondolkodásán könnyen fordít.
- Jó vizuális képzelet jellemzi.
- A részletekben nem merül el, az összetettet egyszerűbbé teszi.
- Egyszerű, egyenes és elegáns megoldásokat keres.
- Verbális problémákat is tud egyenletben megfogalmazni és kezelni.

Az intelligencia

Jól ismert tény, hogy az intelligencia meghatározásában még a pszichológusok között sincs egyetértés. Jelen tanulmányban – a létező számos definíció közül – kiemelem *Vernon* (1969) definícióját, mely szerint: „B intelligenciának hívjuk az egyénnek és a környezetének olyan mértékű kölcsönhatása során kialakult szkémák szellemi tervek összességét, amennyire ezt szervi berendezései lehetővé teszik” (*Vernon*, 1969; idézi *Skemp*, 1971. 16. o.). (Az általános pszichológiában a szellemi struktúrákat nevezzük szkémáknak. A matematikában nemcsak a komplex fogalmi struktúrákra használjuk, hanem azokra a viszonylag egyszerű struktúrákra is, amelyek a szenzomotoros tevékenységet koordinálják. A szkémáknak két fő funkciója van: egyrészt integrálják a meglevő tudást, másrészt szellemi eszközként szolgálnak az új tudás elsajátításában.)

A B intelligencia fogalmát *Hebb* vezette be 1949-ben. Az intelligencián belül megkülönböztette az A és a B intelligenciát. Míg az előbbi az értelmi képességek kifejlődésének lehetőségére, addig a B intelligencia ennek a fejlődésnek egy későbbi időpontban meglévő szintjére utal. A B intelligencia tehát nem más, mint „megvalósult intelligencia”. Az A intelligenciával szemben – ami nem mérhető, csak megfigyelhető –, a B intelligencia az IQ mércéje. Az A és a B intelligencia között lévő kapcsolatot fontos hangsúlyozni, hiszen az A intelligencia B intelligenciának alapvető összetevő eleme (*Hebb*, 1995).

A matematika és az intelligencia

Skemp (1971) szerint a matematika a B intelligencia egyik példájaként szolgálhat. Ennek magyarázata a következőkben foglalható össze:

1) A matematika tanulása során a szkémák fejlődésének igen sok példájával találkozhatunk, *Vernon* (1969) szerint pedig éppen ezeknek a szkémáknak az összessége adja a B intelligenciát.
2) A matematikának a természettudományokban, az ipar és a kereskedelem problémáinál történő alkalmazása olyan jelentős mértékű, hogy emiatt a matematika az egyik legfontosabb – ha nem a legfontosabb – eszközt jelenti fizikai környezetünk megismerése és formálása vonatkozásában. Amikor fizikai környezetünket meg akarjuk érteni, ellenőrizni és a benne zajló történéseket előrevetíteni, akkor ez a fentiek tükrében nem más, mint a B intelligencia megnyilvánulása. Ezek alapján a matematika kétségtelenül a B intelligencia egyik legfontosabb fejlődését példázza.

Az egyén intellektuális, pszichikai működéséből egy sajátos konfiguráció alakulhat ki, amely megfelel a matematikai struktúrának, betöltve a külső modelláló tényező szerepét. E strukturálódási folyamat keretében az A-típusú intelligencia alapján alakul ki a B-típusú intelligencia.

Gondolatok, hipotézisek

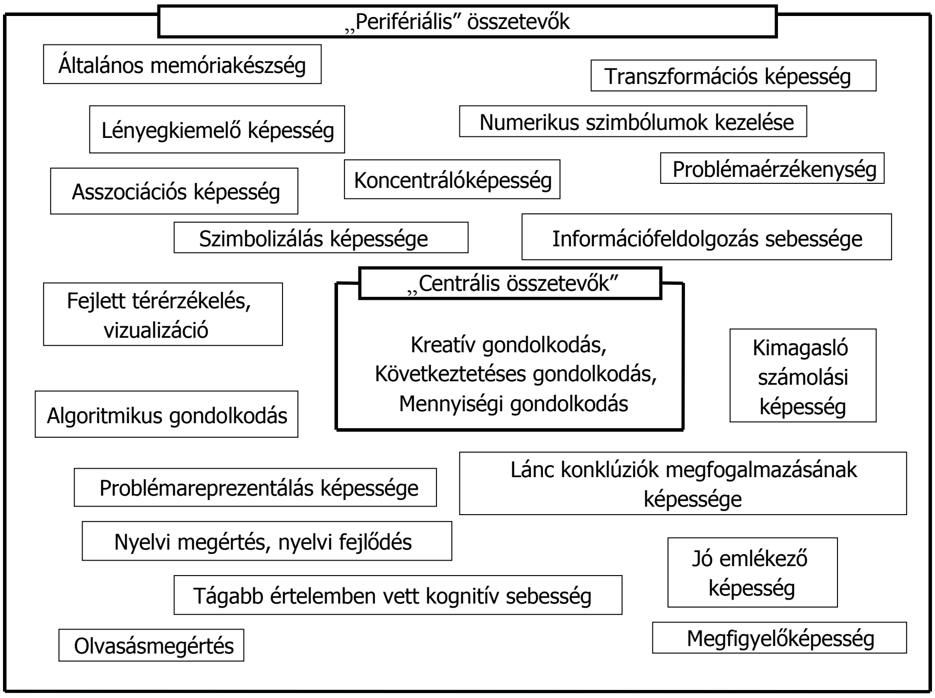
Az Amerikai Matematikatanárok Országos Tanácsa szerint a matematika több mint fogalmak, algoritmusok alkalmazásának megtanulása. Megközelítésükben a matematika egy hatékony helyzet-felismerési módszer. Ebben a paradigmában a matematikai képesség pozitív gondolkodásra és cselekvésre való hajlamot jelent, ami elsősorban a matematikai tanulási-feladatok megközelítésében nyilvánul meg, majd általánosságban a gondolkodásukra lesz jellemző (*National Council of Teachers of Mathematics*, 1989). A matematikai képesség a valóság magyarázatára és leírására egyetemesen alkalmazott matematikai gondolkodásmódot foglalja magába. Ahhoz, hogy az egyén megfelelő matematikai képességgel rendelkezzen, és ezen képességét matematikán kívül és belül, valamint a kettő határterületén lévő kontextusokban is alkalmazni tudja, rendelkeznie kell egy sor olyan készséggel, amit összefoglalóan matematikai készségnek nevezünk. *Niss* (1999) a készségeket nyolc osztályba sorolta: (1) matematikai gondolkodás és következtetés; (2) matematikai érvelés; (3) matematikai kommunikáció; (4) modellezés; (5) a feladat megfogalmazása és megoldása; (6) ábrázolás, megjelenítések értelmezése; (7) szimbolikus, formális, technikai nyelv- és művelethasználat; (8) eszközhasználat. A matematikai gondolkodásmódot átható és abban meghatározó szerepet játszó kognitív képességek és készségek olyan összetevőknek vagy részképességeknek tekinthetők, amelyek a matematikai képesség szempontjából dominanciával bírnak és a matematikai teljesítményben érhetőek tetten. A matematikai teljesítmény tesztekkel történő vizsgálata a terület objektív jellege miatt megbízható, ugyanakkor az alkotó matematikusok azonosítása mégsem megoldott (*Gyarmathy*, 2001). A matematikai teljesítmény hátterében – ezáltal a matematikai képesség hátterében is – nagyon sok összetevő áll: (1) *kognitív képességek* (általános értelmi képességek, specifikus mentális képességek); (2) *kreativitás*; (3) *sze-*

mélyiségjellemzők (általános személyiség-vonások és motivációs faktor); (4) külső feltételek (pl. nem, szociokulturális háttér, életkor stb.).

A matematikai gondolkodás szempontjából relevanciával bíró kognitív képességek felosztását és a matematikai képesség manifesztációjában részt vállaló összetevőket az 1. ábra mutatja be.

1. ábra
A kognitív képesség összetevői a matematikai képességre vonatkoztatva

A megnevezett összetevők egy része „centrális”, más része inkább „periférián” található (2. ábra). A „periférián” a matematikai képességnek olyan általános összetevői vannak, mint például az általános memória, az információfeldolgozás, a numerikus szimbólumok kezelése, az analógiás gondolkodás, az általános vizuális észlelés stb. Például a „számolótehetségek” bármilyen négyjegyű szorzás eredményét pillanatok alatt képesek fejben kiszámolni, számolási képességük átlagon felüli, mégsem nevezzük őket matematikai tehetségeknek. *Kondé* és *Cziegler* (2001) vizsgálatukban kimutatták, hogy a kognitív struktúrán belül a matematikai feladatok megoldására valószínűsíthetően nagy befolyása van a munkamemóriának, de ez csak az egyik szükséges feltétel, ami önmagában még nem elegendő.



2. ábra
A kognitív képességek „centrális" és „perifériális" összetevőinek rendszere

Az általános képesség-összetevők hol szorosabb, hol kevésbé szorosabb kapcsolatban állnak egymással. Egy olyan képesség, mint pl. a térbeli vizualitás képessége jelentősen befolyásolja a geometriai és topológiai problémák megoldási sikerességét, és kisebb szerepet játszik például a statisztikai problémák megoldásában. A térszemlélet hiánya – hiányossága – a matematika tananyag elsajátításának csak egy részét befolyásolja. Valószínűsíthető, hogy a téri képességek hatása szelektívnek tekinthető az általános értelemben vett matematikai teljesítményre (*Salat* és *Séra*, 2002), amelyben a problémák megoldásának többségéhez nincs szükség téri stratégiák alkalmazására. A vizuális formákkal való tevékenység képessége kevésbé szükséges az olyan feladatok megoldásánál, ahol számsorozatok tagjai között kell kapcsolatot felfedezni vagy egyszerű számítási feladatokat kell elvégezni alapműveletek segítségével stb.

A „periférián" lévő képesség-összetevők szükségesek ahhoz, hogy valaki „jó" legyen matematikából, de ahhoz nem elegendőek, hogy matematikai tehetséggé is váljon. Ehhez a „centrális" helyen lévő kreatív gondolkodás, következtetéses gondolkodás és a mennyiségi gondolkodás magas szintű alkalmazására van szükség.

A vizsgálatunk egyik célja az volt, hogy megpróbáljuk azonosítani azokat a faktorokat, amelyek a matematikai teljesítmény szempontjából relevánsak lehetnek. Feltételezésünk szerint a matematikai teljesítmény hátterében a kreatív gondolkodás, a mennyiségi gondolkodás és a következtetéses gondolkodás faktorai állnak (1. táblázat), amelyek magas szintű alkalmazása szükséges feltétele a jó matematikai teljesítmény elérésének.

1. táblázat. A „centrális" képesség-összetevők

Kreatív gondolkodás	*Következtetéses gondolkodás*	*Mennyiségi gondolkodás*
• Az *originalitás* foka (olyan megoldások száma, amik másnak nem jutnak eszébe) • A *fluencia* (hány megoldást talál egy problémára) • A *flexibilitás* (a gondolkodás rugalmassága)	• *Induktív gondolkodás* (következtetés az egyedi esetekről az általánosra) • *Deduktív gondolkodás* (levezetés, következtetés az egészből az egyes részekre)	Matematikai • tulajdonságok, • fogalmak, • relációk ismerete

A matematikai teljesítmény és a kreativitásmutatók között erős kapcsolat feltételezhető. A matematikából jó teljesítményt mutató diákok kreativitás- és a divergens gondolkodás teszten elért eredményei sokkal jobbak, mint a begyakorlott és algoritmizált megoldásokat igénylő rutinszerű feladatokat tartalmazó teszteken.

A matematikai teljesítmény szignifikáns kapcsolatot mutat a következtetéses gondolkodással. Az induktív gondolkodásnak különösen fontos szerepet lehet tulajdonítani, mivel az indukció olyan következtetések láncolata, amely az egyedi esetekről az általánosra következtetés folyamatát foglalja magába; szabályok felismerését és modellek megalkotását jelenti (*Csapó*, 1994), ami a matematikai gondolkodás alapeleme. A deduktív gondolkodás az általánosításokból a konkrétumokra való következtetés. Az elméleti igazság alapján megerősítjük vagy cáfoljuk, jóváhagyjuk vagy módosítjuk a tapasztalatok igazságait.

A mennyiségi gondolkodás a matematikai tulajdonságok és relációk ismeretét igényli. Ez a képesség mennyiségekkel kapcsolatos és matematikai fogalmak ismeretét kívánó tesztekkel mérhető. A matematikai tehetség összetevőjeként egész bizonyos meghatározottsága.

Az intelligencia és a matematikai képesség közötti kapcsolat feltérképezésére szolgált például a *Stanley* (1974) nevéhez kapcsolható Study of Mathematically Precocious Youth (SMPY) felmérés. Ennek eredményei kiemelik, a „*g*" faktor matematikában betöltött szerepének jelentőségét. A felmérést 7. és 8. osztályos tanulókkal végezték. A felvett teszt egyfajta „*g*" tesztnek volt tekinthető. Azon tanulók, akik magas pontszámot értek el – különösen a matematikai részben – élhettek azzal a lehetőséggel, hogy magasabb fokú matematikai képzésben vegyenek részt. A program szerint kiválogatott és képzett tanulók egyetemi éveik alatt gyakran végeztek matematikai vagy természettudományos tanulmányokat, majd olyan pályán helyezkedtek el (*Lubinski* és *Benbow*, 1994), ami magas szintű gondolkodást igényelt. Ebből arra következtethetünk, hogy a program szerint kiválogatott, matematikából jó képességgel rendelkező tanulókra jellemző a „*g*" magas szintje. Másik oldalról az alacsony intelligenciával rendelkező tanulók még az elemi számolási feladatokat is csak komoly erőfeszítések árán tudták megtanulni. Ha meg is tanulták, az átlagosakhoz képest nagyon sok időre volt ehhez szükségük (*Geary*, 1994). *Carroll* (1998) ezek alapján arra a következtetésre jutott, hogy a „*g*” fejlettségi szintje valószínűleg befolyásolhatja az embernek azon képességét, amely segítségével megtanul matematikai feladatokat megoldani. Az általános „*g*” faktor fejlettségi szintje az emberi fejlődés minden szakaszában szoros kapcsolatot mutat a matematikai tudásszint-mérő tesztek eredményeivel. A matematikai tehetség identifikációjának egyik fő irányelve szerint az intelligenciateszteken elért eredmények összefüggést mutatnak a matematikai tehetséggel; főleg a nem-verbális téri gondolkodást kívánó feladatokat tartalmazó tesztek – mint a Raven-féle intelligenciateszt – lehetnek jelzésértékűek (*Gyarmathy*, 2001).

A Raven-féle intelligenciateszt elsősorban azt mutatja meg, hogy a vizsgált személynek milyen fejlett az új (nem verbális) képzeteket alkotó képessége. A Raven-teszt megoldójának geometriai jelekből álló, több elemű sorozat hiányzó elemét kell kiválasztani több lehetséges megoldás közül. A Raven-feladatok megoldása elsősorban olyan gondolkodási mechanizmust mozgósít, ami a dolgok tulajdonságainak és kapcsolatának összehasonlításán alapszik azáltal, hogy hasonlóságok és különbségek megállapítását kívánja meg. Ez azonban a matematikai gondolkodásmódnak csak egyik – igaz, igen lényeges – összetevője. *Guilford* (1950) szerint az intelligencia-tesztek csak a konvergens gondolkodást mérik. Elsősorban olyan feladatokat tartalmaznak, amelyekre egyetlen, előre meghatározott válasz az elfogadott. Ilyen tekintetben az önálló, gazdag fantáziájú embereknek – akik egy problémahelyzetben sokféle választ képesek adni – nem kedvez az intelligencia-teszt. Ha kiválasztjuk az intelligencia-tesztek alapján legjobban teljesítő emberek 20%-át, akkor a kreatív gondolkodású emberek 70%-a kiesik ebből a válogatásból (*Szabó*, 1997).

Kreatív teljesítmény létrehozása az intelligencia megnyilvánulásának bizonyos fokához kapcsolható, ám a magas intelligencia csak lehetővé teszi a kreatív teljesítmény létrejöttét, önmagában még nem elegendő. A Raven-féle intelligenciateszten és a kreativitás fokát megmutatni kívánó matematikai tesztlapokon mutatott teljesítmények közötti kapcsolat nem szignifikáns. Mivel a matematikai képesség legfontosabb faktora a kreativitásban realizálható, a Raven-tesztet önmagában nem szerencsés a matematikai tehetség azonosításához használni. Szignifikáns kapcsolatot csak az olyan matematikai képességet mérő tesztekkel mutat, amelyek egy speciális matematikai képesség faktort, az induktív gondolkodás faktorát ölelik át.

A felmérés módszerei és eszközei

A minta

A felmérésben 51 általános iskola hetedik osztályos tanuló, és 61 középiskola harmadik osztályos tanuló vett részt. A kísérleti személyek általános tanterv szerint tanulták a matematikát.

A vizsgálati eszközök bemutatása

A jó matematikai tevékenység hátterének vizsgálatán keresztül megpróbáltuk feltérképezni a matematikai képesség struktúráját. Ennek egyik vizsgálati módszer lehet, ha különböző típusú matematikai feladatokat és azok megoldását elemezzük. Ennek megfelelően a vizsgálat során az alábbiakban ismertetésre kerülő teszteket alkalmaztam. A későbbiek során a tömörebb fogalmazás érdekében a zárójelben feltűntetett rövidítéseket használom:

– Raven-féle Standard Progressive Matrices és a Raven-féle Advanced Progressive Matrices teszt (RAVEN),
– Ruth-féle figyelemvizsgálat (RUTH),
– Szöveges feladatok (SZÖVEGES),
– Számsor teszt (SZÁMSOR),
– Összefoglaló-versenyfeladatok (VERSENY),
– Fejtörő feladatok (KREATÍV),
– Sík- és térgeometria feladatokat tartalmazó feladatlap (GEOMETRIA).

A kapott eredmények összehasonlíthatósága érdekében mind a hetedikes, mind a tizenegyedikes diákok által megoldandó feladatsorok ugyanolyan típusú feladatokat tartalmaztak. Ahol lehetett ugyanazzal a feladatsorral mértük a két évfolyamot (RUTH, SZÖVEGES, KREATÍV). Ezen feladatsorok megoldásához nem volt szükség mély matematikai tudásra (ezek a feladatsorok nem voltak konkrét tárgyi tudáshoz kötve), elsősorban az ötlet volt mérvadó; a számszerű válasz megadása csak az elemi műveletek elvégzését igényelte. A többi feladatsor esetén (SZÁMSOR, VERSENY, GEO) a szerkezet és a tartalom megegyezett, ám a nehézségi szint a korosztályos elvárásoknak megfelelően különbözött. A tesztek összeállításánál fontos cél volt az is, hogy a tanulók számára a feladatok lehetőség szerint ismeretlenek legyenek (újszerűség érdekében a feladatsorok összeállításához nemcsak a hazai irodalom, de Erdélyben használatos tankönyvek is segítségül szolgáltak).

Az egyes feladatsorok item-számát és reliabilitását a 2. táblázat tartalmazza (a geometria feladatsornál a sík- és térgeometriai feladatsorok reliabilitását külön adtuk meg). Azoknál a teszteknél, ahol az item-szám kicsi volt (VERSENY, SÍKGEOMETRIA, TÉRGEOMETRIA) a teszt megbízhatóságának érdekében a teszthosszabbítás (teszt megkettőzése) során kapott értékeket közöljük (*Horváth*, 1993). A mérőeszközök prediktív, előrejelző volta feltételezhető, ha elfogadjuk azt, hogy a térelképzelés és a háromdimenziós tárgyanalízis fejlettségi fokáról elsősorban térgeometriai feladatok megoldása során győződhetünk meg, illetve az induktív gondolkodás számsor résztesztben elért eredményekből is következtethetünk arra.

2. táblázat. A matematikai tesztek item-száma és reliabilitása évfolyamonként

Évfolyam	*Feladattípus*	*Itemek száma*	*Cronbach-α*
hetedik	Szöveges	20	0,83
	Számsor	20	0,94
	Verseny	5	0,76
	Kreatív	8	0,76
	Síkgeometria	5	0,72
	Térgeometria	5	0,84
tizenegyedik	Szöveges	20	0,83
	Számsor	20	0,71
	Verseny	5	0.80
	Kreatív	8	0,76
	Síkgeometria	5	0,89
	Térgeometria	5	0,79

Raven-féle intelligenciateszt (RAVEN)

A kísérleti személyek a vizsgálat első lépéseként intelligenciatesztet töltöttek ki. Az általános iskolás korosztály esetében a Standard Raven-teszt (1960), a középiskolás mintában pedig a „Nehezített Progresszív Mátrixok” (Advanced Progressive Matrices, 1962) teszt szolgált mérőeszközként. Ezek a teszt a nem verbális intelligencia mérésére szolgáltak, azt mutatják meg, hogy a személy milyen mértékben képes új képzetek alkotására, mennyire alkalmas a gyors, pontos ítélethozatalra, a törvényszerűségek felismerésére, az absztrakcióra, a nonverbális készségek mozgósítására. A Raven-tesztben a megoldáshoz meg kell figyelni a mátrixban lévő figurákat, meg kell találni a közöttük lévő logikai kapcsolatot, környezet figyelembe vételével el kell képzelni, hogy milyen lehet a hiányzó rész, majd ki kell választani azt a 6-8 megadott lehetőség közül. *Carpenter* és munkatársai (1990. 429. o.) rámutattak arra, hogy a Raven-tesztben megoldandó feladatok „a problémák kisebb, kezelhetőbb részekre bontásának, majd a kisebb részek további szétbontásának képességét mérik, és azt, hogy a szétbontás által a problémamegoldás során keletkező célok és részcélok hierarchiáját képes-e az egyén kezelni”. A matematikai problémák egy része éppen ilyen képességeket igényel.

Ruth-féle figyelmvizsgálat teszt (RUTH)

A vizsgált személyek figyelmének stabilitását és megosztó képességét is felmértük, továbbá a Ruth-féle teszt az egyszerű számolási készség mérésére is szolgált. A teszt egyrészt informatívnak tekinthető az egyszerű, viszonylag monoton, numerikus mentális műveletek közben történő figyelem-koncentráció stabilitásának és a figyelem megoszthatóságának tekintetében, másrészt információt ad az egyszerű számolási műveletek elvégzésének gyorsaságáról és hibátlanságának mértékéről, valamint a mentális-műveletek végzésének terhelés-toleranciájáról is. A kiértékelés az utóbbi eredményeikeit tartalmazza.

Szöveges feladatok teszt (SZÖVEGES)

A szöveges feladatokon nyújtott teljesítmény a matematikai eredményesség fontos indikátorának számít; a matematikai ismeretek alkalmazásában jelentős szerepet játszik. A szöveges feladatok matematikai természetüket tekintve egyszerűek és megoldásukhoz az alapműveleteken, néhány matematikai alapfogalom (pl. arányosság) és az alapvető egyenletrendezési készségen túlmutató matematikai tudásra nincsen szükség (*Gárgyán*, 2002). A matematikatudás maradandó és szinte mindenki számára szükséges összetevőjét mérik, olyan készséget, hogy képesek vagyunk-e a köznapi problémákat matematikailag helyesen reprezentálni, majd a szükséges és megfelelő matematikai műveleteket elvégezni. A szöveges feladatok reális dolgokról szólnak, amelyek akár magukkal a tanulókkal is megtörténhetnek. A megoldás sikerességét – a fentieken kívül – több egyéb tényező is befolyásolja: (1) a szöveges információk kódolása és értelmezése, (2) az adatok szükség szerinti átalakítása, (3) a megoldáshoz szükséges műveletek kiválasztása és (4) a számítások helyes elvégzése (*Vidákovich*, 2003). Az egyik feladat:

> *Egy ötvözet elkészítéséhez 2 rész ezüstöt és 3 rész ólmot használunk. Hány gramm ezüst szükséges 15 gramm ilyen ötvözet elkészítéséhez?*

A feladatok összeállításakor lényeges szempont a pontos és világos fogalmazás és az adandó válaszok egyértelműsége. Ez volt az egyik olyan feladatsor, amely mindkét évfolyamon ugyanazokat az itemeket tartalmazta; felépítését tekintve a nagyon egyszerű problémától indulva a nehezebbek irányába.

Számsor teszt (SZÁMSOR)

Az induktív gondolkodás mérésére használható az úgynevezett számsor teszt, amelynek egy itemjét a következőképpen kell elképzelni:

2 5 11 _ 47 _ 191

A feladat megoldásához a kísérleti személynek fel kellet fedeznie, hogy milyen szabály szerint épül fel a sorozat. A hetedikes és a középiskolás korosztálynál is 20 számsort tartalmazott a teszt, felépítését tekintve egyre nehezedő formában. A feladatsor a logikai következtető képesség tipikus jellemzőit: a fejlett absztraháló képességet, a funkcionális jellegű gondolkodást, különböző lánc-konklúziók megfogalmazásának a képességét és az elég magas koncentráló képességet mozgatja meg.

Összefoglaló-verseny teszt (VERSENY)

Az összefoglaló-verseny feladatsor az általános/középiskolai matematikai témakörökre épülő, a tantervekhez igazodó feladatokat tartalmazott. A feladatsor feladatait – több témakört átölelve – különböző tehetségkutató versenyek feladatsoraiból válogattuk ki. Ezen versenyfeladatok megoldására *Lakatos* (1998. 224. o.) szerint nincs bejáratott, biztos út, „a primitív sejtés, a bizonyítás és az ellenpéldák heurisztikus rend szerint vezetnek". A megfogalmazott hipotézist előbb ellenőrizni kell, majd ha érvényessége bebizonyosodott, akkor válik alkalmazhatóvá.

Fejtörő feladatok teszt (KREATÍV)

A fejtörő feladatok teszt a kreativitás vizsgálatát célozta meg. A matematikai képességek vizsgálatánál feltételezhetően nagy jelentőséggel bír a kreativitás, ami a nem rutinszerű problémák megoldásához szükséges. A feladatlapot két részre osztottuk. Az egyik részben az összeállítás fő szempontja az volt, hogy a megoldás megadásának valószínűsége néhány perc elteltével ne változzon. A feladatok többségére a választ egy percen belül meg lehetett találni, vagy legalábbis a megoldási ötlethez el lehetett jutni. Egy feladat erről a résztesztről:

> *A szegény ember összetalálkozik az ördöggel, aki üzletet ajánl neki: ahányszor kezet fognak, annyiszor duplázza meg a zsebében lévő garasokat, azonban cserébe az ördög minden alkalommal 24 garast kap. Megegyeznek. Háromszori kézfogás után azonban elfogy a szegény ember pénze. Hány garasa volt eredetileg?*

A matematikai feladatok egyik nagyon fontos jellegzetessége, hogy a megoldások számát tekintve különbözőképpen végződhetnek. Vannak olyan feladatok, amelyeknek nincs, vagy egy megoldása van, vannak olyanok amelyeknek végtelen sok megoldása van és vannak olyanok is, amelyeknek egynél több, de véges számú megoldása létezik. Ez a megkülönböztetés azért fontos, mert mindegyik típushoz más-más gondolkodásmód rendelhető.

A teszt másik felében olyan feladatok kerültek kiválogatásra, amelyeknek a megoldás szempontjából több, de véges sok megoldása létezik. Az ehhez rendelhető szemléletmód egyik legjellemzőbb vonása a divergens gondolkodásmód. A kiváló matematikai gondolkodásmód jellemzői közé tartozik az, hogy az egyén nem áll meg egyetlen megoldás megadásánál, hanem újabb és újabb megoldásokat próbál keresni. Az alábbi feladatnál:

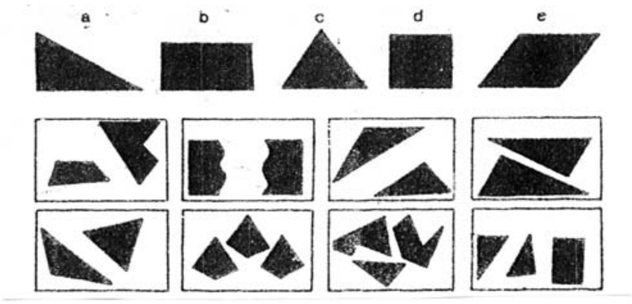
> *Egy gyufa helyének megváltoztatásával igazzá kellett tenni az egyenlőséget és a helyes megoldást le kellett jegyezni.*

X + VIII = XVI

A feladatsorok kitöltésében jelentős szerepet játszott az idő, mint teljesítményfaktor. Ennek két oka van. Az egyik, hogy a fluid intelligenciának része az a faktor, amelyet a gondolkodási sebesség faktorának nevezünk. A tesztekkel a képesség szintjének fejlettsége mellett a gondolkodási problémák megoldásának a sebességét is vizsgálhatjuk. A képességszint és a sebesség között kapcsolat van: a magas szintű gondolkodási képességgel rendelkező emberek általában gyorsabban oldanak meg matematikai problémákat, mint a gyengébb gondolkodási képességűek, ám ez az összefüggés nem ilyen szigorú (*Carroll*, 1998). A másik oka az idő korlátozásának az volt, hogy egy-egy osztály esetén a tesztek felvételére öt tanítási órára volt szükség.

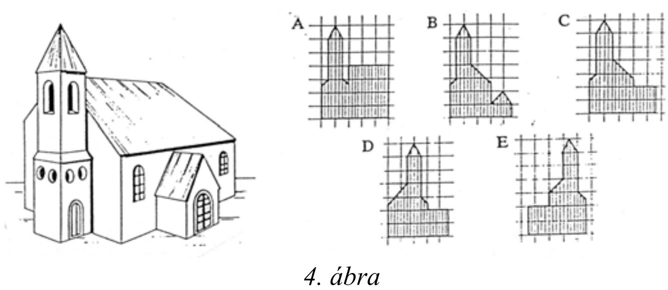
Geometriai feladatok teszt (GEOMETRIA)

A geometria feladatlapon sík és térbeli feladatok szerepeltek. A síkgeometriai feladatoknál a cél a képzelőerő fejlettségének vizsgálata volt. A feladat jellege annyiban különbözött a divergens gondolkodást igénylő feladatoktól, hogy a transzformációs képességet, mint az alkalmazkodó szemléletmód egyik dimenzióját mérte (*Völgyesi*, 1982). A transzformációs képességet az adott feladatokban kétdimenziós térben való gyakorlatias feladatokon keresztül vizsgáltuk. A hetedikes feladatlapból kiragadott példában az alsó sorban *a téglalapokban lévő darabokat összeillesztve, meg kellett adni, hogy mely figurákat lehet megkapni a felső sorban lévő 5 közül* (3. ábra).



3. ábra
A hetedikes korosztály egyik síkgeometriai feladata

A geometriai feladatok másik csoportja (GEO2) a térelképzelés és a háromdimenziós tárgyanalízis fejlettségi fokára vonatkozóan adott információt. A feladatok célja a vizuális formákkal való tevékenység és ezen produkciók képességének mérése volt. Ezekben a feladatokban nemcsak a közvetlen észlelés, hanem az észlelések emlékezeti felidézése is lényeges elem volt, hiszen e két funkció helyes együttműködése eredményezhette a síkban adott formák létrehozásának és további alakításának feltételét. A tér-geometriai feladatok közül egy példa: *egy templom körvonalai vannak megrajzolva elölről, hátulról és jobb oldalról. A kísérleti személyeknek meg kellett keresni, hogy az öt rajz közül melyik három helyes és a helyes rajzok melyik nézetből ábrázolják a templomot* (4. ábra).

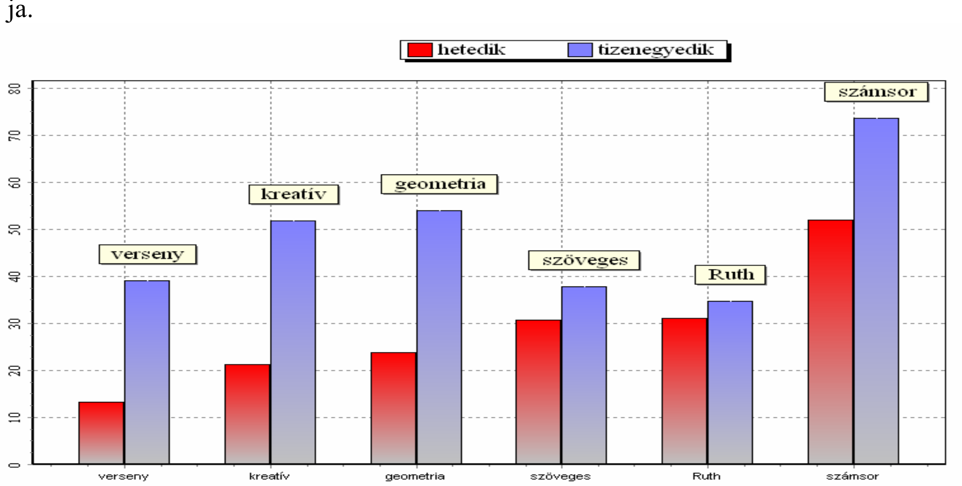


4. ábra
A térgeometriai feladatsor egy feladata a hetedikes feladatlapból

Eredmények

A leíró statisztika eredményei

Az egyes matematika tesztekben kapott százalékos teljesítményéket az 5. ábra mutatja.



5. ábra
A két részminta százalékos teljesítménye az egyes változók függvényében

A százalékos teljesítmény alapján mindkét korosztály esetén elmondható, hogy a legjobb eredményt a számsor teszt megoldásában érték el a diákok. A hetedikeseknél a verseny-feladatsorban, míg a tizenegyedikes mintában a Ruth-féle számolási próbában (és figyelemvizsgálat) teljesítettek leggyengébben a diákok. A 3. táblázat tartalmazza mindkét korosztályra vonatkoztatva az egyes teszteken nyújtott százalékos átlagteljesítményeket.

3. táblázat. Az egyes tesztekben elért százalékos átlagteljesítmények és szórások (évfolyamonként)

Tesztek	*Hetedik évfolyam*			*Tizenegyedik évfolyam*		
	N	*Átlag*	*Szórás*	*N*	*Átlag*	*Szórás*
RUTH	47	31,09	17,57	54	34,7	19,47
SZÖVEGES	51	30,69	12,81	62	37,9	33,55
SZÁMSOR	51	52,01	17,67	60	73,67	22,81
VERSENY	51	13,24	20,71	61	39,02	21,55
KREATÍV	51	21,21	17,36	62	51,84	16,31
GEOMETRIA	51	23,92	31,54	57	54,04	24,53

Két feladatsor kivételével (RUTH és SZÖVEGES) a kapott eredmények alapján elmondható, hogy mindazok a készségek és képességek, amelyek az egyes feladatsorokban elért jó teljesítmény eléréséhez szükségesek, jelentős mértékben fejleszthetők. Úgy tűnik, hogy a négy évnyi tanulás az induktív gondolkodás tekintetében (SZÁMSOR), a kreativitást középpontba állító (KREATÍV) feladatok esetén, a sík- és térszemléletet átfogó (GEOMETRIA) tesztsorozat, valamint az összefoglaló-verseny (VERSENY) tesztsorozat esetén tűnik igen hatékonynak. A számolási készség (RUTH) és a mennyiségi gondolkodást megtestesítő (a mindennapi élet problémáit leginkább reprezentáló) SZÖVEGES feladatsor eredményei az elővizsgálat adatai alapján nem változtak jelentős mértékben.

A matematikai teljesítmény vizsgálata variancia-analízissel és faktoranalízissel

A vizsgálat szempontjából elsődleges cél volt, hogy megpróbáljuk meghatározni azokat a faktorösszetevőket, amelyek az általános matematikai teljesítmény szempontjából meghatározóak lehetnek. Ezért a kiértékelés ezen szakaszában elkészítettünk egy olyan mutatót (MATTELJ), amellyel az általános matematikai teljesítmény jellemezhető. Ez a mutató a RUTH, a KREATÍV, a VERSENY, a SZÁMSOR, a SZÖVEGES és a GEOMETRIA feladatsoron elért eredményekből állt össze. E mögött a hat változó mögött kerestük a látens struktúrát.

Elsőként megvizsgáltuk a matematikai összteljesítmény (MATTELJ) korrelációját a többi teszten elért eredményekkel. A korrelációs együtthatókat a 4. táblázat mutatja be. A *-al jelölt korrelációs együtthatók $p<0,05$ szinten szignifikánsak, a **-al jelölt korrelációs együtthatók $p<0,01$ szinten szignifikánsak.

4. táblázat. A MATTELJ és a különböző feladatsorok viszonyát jellemző korrelációs együtthatók a két mintában

Évf.	MATTELJ	RUTH	KREATÍV	VERSENY	SZÁMSOR	SZÖVEGES	GEO
7.	*r*	-0,147	0,097	0,569**	0,871**	0,704**	0,676**
	N	47	47	51	51	51	51
11.	*r*	0,083	0,749**	0,615**	0,777**	0,816**	0,695**
	N	54	62	62	61	61	57

A korrelációs táblázatból leolvasható, hogy a matematikai teljesítmény mindkét évfolyamon a legtöbb vizsgált területtel szignifikáns kapcsolatban van ($p<0,01$). Kivétel képeznek ez alól a figyelem (RUTH) és a kreativitás (KREATÍV) tesztben elért eredmények. Előbbi mind a hetedikes, mind a tizenegyedikes mintában, az utóbbi csak a tizenegyedikes mintában.

A kiértékelés további részében megnéztük, hogy a feladatsorok között van-e átfedés, milyen a különböző változók közötti kapcsolat; át tudjuk-e alakítani az eredeti változóinkat lineáris transzformáció segítségével az eredetinél kisebb számú, új változószetté. Meg lehet-e adni olyan új változókat, amelyek korrelálatlanok egymással és a kiinduló változók által megtestesített információtömeg lehető legnagyobb részét megőrzik. A kérdés megválaszolásához a faktoranalízis eszközeit használtuk. Az itt közölt eredmények már csak annak a futtatásnak az eredményeit tartalmazzák, amelyeket a különböző próbálgatások után kaptunk (a legkisebb kommunalitású változó kihagyása után). A hetedikes mintában a RUTH-féle feladatsor elhagyása mutatkozott szükségesnek, míg a tizenegyedikes mintában minden változó benne maradt a vizsgálatban. A Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) mutató értéke a hetedikes mintában $KMO = 0{,}662$, míg a tizenegyedik évfolyamnál KMO=0,691, a Bartlett-teszt eredménye mindkét mintában ($p<0{,}05$), amellyel teljesülnek a minimális követelmények. A lejtődiagram alapján a hetedikeseknél és a tizenegyedikeseknél is kettő faktorra számíthattunk.

Az 5. és 6. táblázat bemutatja a faktorokban megtestesülő információtartalmat. A hetedikes mintában a faktormodell egy látens változóval a variancia 33,83%-át, míg két faktorral 43,44%-át magyarázza; a tizenegyedikes mintában a két faktor 46,2%-ot őriz meg a változók eredeti információtartalmából.

5. táblázat. A két faktor által kapott információtartalom a hetedikes mintában

Faktor	*Initial Eigenvalues*			*Extraction Sums of Squared Loadings*		
	Összes	*Variancia %*	*Kumulatív %*	*Összes*	*Variancia %*	*Kumulatív %*
1	2,16	43,23	43,23	1,69	33,83	33,83
2	1,12	22,31	65,55	0,48	9,61	43,44
3	0,78	15,62	81,17			
4	0,56	11,21	92,38			
5	0,38	7,62	100,00			

Alkalmazott eljárás: Maximum Likelihood

6. táblázat. A két faktor által kapott információtartalom a tizenegyedikes mintában

Faktor	*Initial Eigenvalues*			*Extraction Sums of Squared Loadings*		
	Összes	*Variancia %*	*Kumulatív %*	*Összes*	*Variancia %*	*Kumulatív %*
1	2,44	40,61	40,61	1,55	25,91	25,91
2	1,15	19,21	59,82	1,22	20,29	46,20
3	0,94	15,61	75,44			
4	0,60	10,07	85,51			
5	0,48	7,99	93,50			
6	0,39	6,50	100,00			

Alkalmazott eljárás: Maximum Likelihood

A 7. és 8. táblázatok a faktorsúlyokat tartalmazzák, ezek jelzik, hogy az egyes változók mekkora súllyal és milyen irányban alakítják a kapott faktorokat. A hetedikes mintában az első faktort a SZÁMSOR, a GEOMETRIA és a SZÖVEGES feladatok alkotják, míg a második faktorhoz a VERSENY és a KREATÍV feladatok tartoznak.

7. táblázat. A két faktorhoz tartozó faktorsúlyok a hetedikes mintában

	Faktor	
	1	2
SZÁMSOR	0,812	–0,041
GEOMETRIA	0,681	–0,274
SZÖVEGES	0,609	0,013
VERSENY	0,429	0,582
KREATÍV	–0,116	0,255

Alkalmazott eljárás: Maximum Likelihood

A tizenegyedikes mintában az első faktor a GEOMETRIA, a KREATÍV és a SZÖVEGES feladatsorok, míg a második faktor a SZÁMSOR, a VERSENY és a RUTH feladatsorokat foglalja magába.

8. táblázat. A két faktorhoz tartozó faktorsúlyok a tizenegyedikes mintában

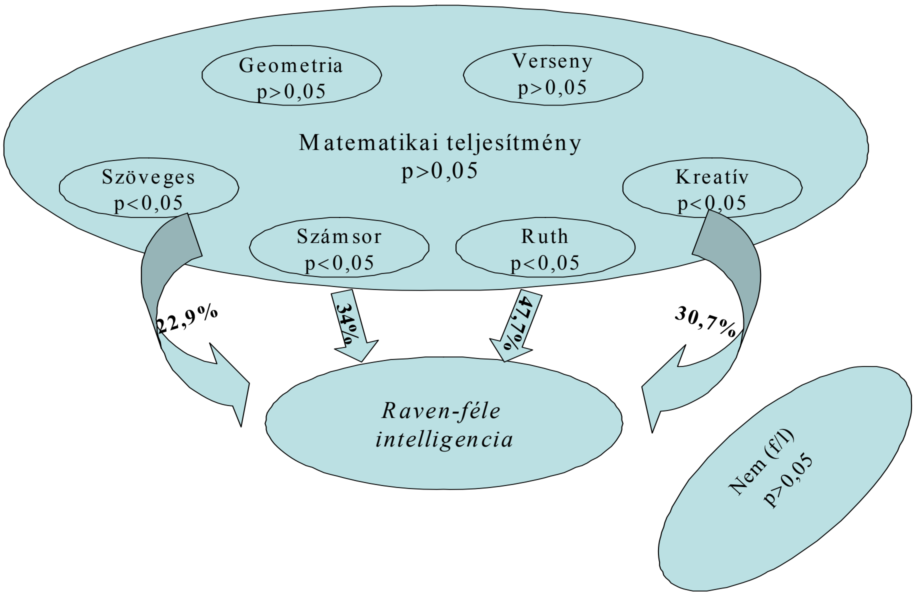
	Faktor	
	1	2
GEOMETRIA	0,999	–0,003
KREATÍV	0,456	0,235
SZÖVEGES	0,415	0,819
SZÁMSOR	0,284	0,492
VERSENY	0,283	0,383
RUTH	–0,096	0,321

Alkalmazott eljárás: Maximum Likelihood

A Raven-féle intelligencia és a matematikai teljesítmény kapcsolata

Annak a kérdésnek a megválaszolásához, hogy melyek azok a változók (a fentebb említett matematikai változók közül), amelyek befolyásolhatják a Raven-féle intelligenciát a variancia-analízist használtuk. A meglévő adatbázison egy olyan modellt állítottunk fel, amelyben arra kerestük a választ, hogy mennyire függ a vizsgált személyek Raven-féle intelligenciateszten nyújtott teljesítménye az általános matematikai teljesítményüktől (MATTELJ), az egyes részteszteken nyújtott teljesítményüktől és a nemtől (mint ismert háttérváltozótól). Ennek megfelelően az alábbi három kérdéskört jártuk körbe: (1) igaz-e, hogy az általános matematikai teljesítmény kapcsolatban áll a Raven-féle intelligenciával; (2) milyen kapcsolatban állnak az egyes feladatsorok teljesítményei a Raven-féle intelligenciával; (3) a fiúk jobbak-e a Raven-féle intelligencia feladatsoron elért teljesítményben, mint a lányok?

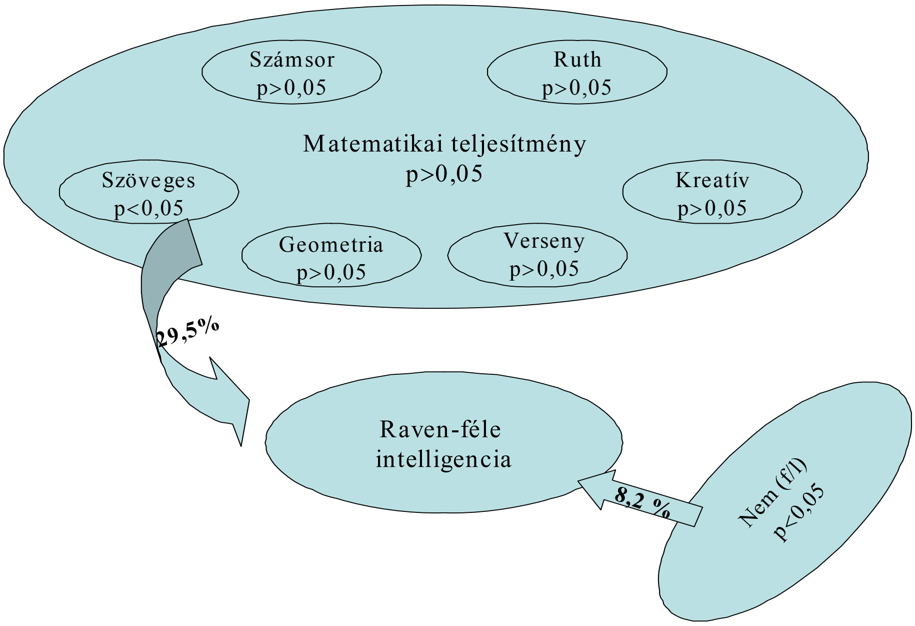
A vizsgálatok eredményei alapján egyik évfolyam esetén sem kaptunk szignifikáns kapcsolatot a MATTELJ és a Raven-féle intelligencia között. Ezek után megnéztük, hogy az egyes feladatsorok és a Raven-féle intelligenciateszt eredményei között milyen kapcsolat van. A hetedikes mintában (6. ábra) a Raven-teszt eredményeivel a SZÖVEGES, a SZÁMSOR, a RUTH és a KREATÍV feladatsorokon elért teljesítmény mutatott szignifikáns kapcsolatot. A négy független változó által megmagyarázott variancia torzítatlan értékei: $R^2_{SZÖVEGES} = 22{,}9\%$, $R^2_{SZÁMSOR} = 34\%$, $R^2_{RUTH} = 47{,}7\%$, és $R^2_{KREATÍV} = 30{,}7\%$.



6. ábra
A függő (RAVEN) és a független változók szignifikanciája és a magyarázott hányad %-os torzítatlan értékei a hetedikes mintában

A tizenegyedikes mintában (7. ábra) a hat mért változó közül csak a SZÖVEGES feladatsor befolyásolta szignifikánsan a Raven-féle feladatsor eredményét, itt a megmagyarázott hányad torzítatlan értéke $R^2_{SZÖVEGES} = 22{,}5\%$.

Amikor arra vagyunk kíváncsiak, hogy a fiúk jobban teljesítenek-e az intelligenciateszten, nem csupán a fiúk átlagteljesítményeit hasonlítjuk össze a lányok átlagteljesítményével, hanem arra keressük a választ, hogy a két átlagteljesítmény közötti különbség elég nagy-e ahhoz, hogy a teljes populációban is létezőnek tekinthessük. A lányok és a fiúk intelligencia teszten elért eredménye között – a *t*-próbát elvégezve –, a hetedikes mintában nem, míg a tizenegyedik évfolyamon szignifikáns eltérés adódott ($t=2{,}38$; $p<0{,}05$).



7. ábra
A függő (RAVEN) és a független változók szignifikanciája és a magyarázott hányad %-os torzítatlan értékei a tizenegyedikes mintában

Összefoglalás, konklúzió

A matematika rendszerez, axiomatizál, levezet, bizonyít, új fogalmakat vezet be. Egy flexibilis gondolkodású, kiváló felfogású ember már minimális előismerettel is hozzáfoghat tanulmányozásához, elmerülhet a problémák megoldásában. Azonban az új fogalmak megértéshez szellemi erőfeszítésre is szüksége van. A matematika igyekszik a lényegre csupaszítani a hétköznapi fogalmakat, amellyel egy olyan nyelvezetet hoz létre, ami tisztább és egyértelműbb beszéd, mint az anyanyelvünk. Ennek ellenére azonban a mai matematika sem teljesen önmagáért beszélő valami; egyesek számára ez egész életen keresztül ismeretlen és megismerhetetlen terület marad, míg mások számára kiváló produktumok létrehozásának „színtere”. Számos ellentmondást hordoz magában, amelyeknek feltárása a terület objektív jellege ellenére is igen nagy nehézséget jelent. Az bizonyos, hogy a jó matematikai teljesítménynek számos összetevője van, amelyek meghatározottsága különböző mértékű. Vannak olyan összetevők („periférián” lévő összetevők), amelyek elengedhetetlenül szükségesek a kiváló matematikai produktum létrehozásához, ugyanakkor meglétük mégsem elegendő. Szükséges a „centrális” helyzetben lévő kreatív, következtetéses és mennyiségi gondolkodás magas szintű alkalmazása. Hipotézisünk szerint ahhoz, hogy valaki kiváló matematikai produktumot hozzon létre, vagyis matematikai teljesítménye jó legyen, az egyik legfontosabb összetevő a kreatív gondolkodás: a matematikából jó képességűnek mondható diákoknál elsősorban a divergens gondolkodást megcélzó tesztek eredményei várhatók jobbnak, mint a begyakorlott és algoritmizált megoldásokat igénylő rutinszerű feladatokat tartalmazó tesztek eredményei. Ilyen vonatkozásban, a matematikai teljesítmény szempontjából a kreatív feladatokat tartalmazó feladatsort meghatározóbbnak tartottuk, mint a monoton és egyhangú műveleteket igénylő – rutinszerű – próbákat (pl. számolási próba). Nagy jelentőségűnek ítéltük meg a következtetéses gondolkodást átfogó számsor (induktív gondolkodás), valamint a verseny-feladatokat tartalmazó feladatsorokat; továbbá a mennyiségi gondolkodást reprezentáló szöveges feladatsort. A minta érzékenysége miatt az alábbiakban megfogalmazásra kerülő megállapítások megbízhatósága a nagymintás vizsgálat elvégzése után jelenthető ki nagyobb biztonsággal.

A *kreativitás* meghatározottsága a matematikai teljesítmény vonatkozásában csak a tizenegyedikes mintában mutatkozott meg, (r=0,749; p<0,01), ellentétben hipotézisünkkel, amelyben a matematikai képesség legjelentősebb összetevőjének tekintve dominanciáját mindkét korosztály esetén vártuk. A kreativitás ugyanis, mint alkotó gondolkodás képessé teszi az embert, hogy meglepő, érdekes produktumokat hozzon létre (*Szabó*, 1997), a legtöbb matematikai problémánál a megoldáshoz éppen ilyen, nem megszokott gondolkodásmódra van szükség.

A *számsor teszt* a logikai következtető képesség tipikus jellemzőit megadva (a fejlett absztraháló képesség, a funkcionális jellegű gondolkodás, különböző lánc-konklúziók megfogalmazásának a képessége és az elég magas koncentráló képesség) mindazokat a képességeket átöleli, amelyek szükségesek lehetnek a jó matematikai teljesítmény eléréséhez. Relevanciája egyik korosztály esetén sem meglepő (r=0,871, p<0,01; r=0,777, p<0,01), hiszen a tanulók elsősorban kidolgozott példák segítségével induktívan tanulnak. A példa lépéseit követve általánosítják vagy elvonatkoztatják az adott készség tekintetében a helyes eljárást.

A VERSENY ($r = 0{,}569, p < 0{,}01$; $r = 0{,}615,\ p < 0{,}01$) és a SZÖVEGES (r=0,704, p<0,01; r=0,816, p<0,01) feladatsorok dominanciája is megmutatkozott.

Az egyszerű számolási próba az általános matematikai teljesítménnyel egyik korosztály esetén sem mutatott szignifikáns kapcsolatot, a RUTH tesztnél tapasztalt összefüggés hiánya azt jelentheti, hogy a matematikai képesség szempontjából az egyszerű számolási próba nem releváns.

A faktoranalízis eredménye mind a két korcsoportnál azt mutatta, hogy a vizsgált terület már két faktorral is jól magyarázható, de ez a két faktor a két korosztály esetén más és más. A hetedikes mintában az első faktort a SZÁMSOR, a GEOMETRIA és a SZÖVEGES, a második faktort pedig VERSENY és a KREATÍV feladatsorok adták. Az első látens változó tartalma szerint olyan képességekben manifesztálódik, amelyek tanulás és gyakorlás útján magas szintre fejleszthető, azaz valamiféle mechanikus meghatározottságra utal. A második faktor a kreatív, flexibilis gondolkodásmódot reprezentálja.

A tizenegyedikes mintában az első faktorhoz a GEOMETRIA, a KREATÍV és a SZÖVEGES feladatsorok, míg a másik faktorhoz a SZÁMSOR, a VERSENY és a

RUTH feladatsorok tartoztak. Itt az első faktor fogta át mindazokat az összetevőket, amelyek a nem mechanikus, lépésről-lépésre elsajátítható és tanulható gondolkodásmóddal azonosíthatóak, míg a második faktort inkább a mechanikusabb, gyakorlás által fejleszthető képesség-komponensek dominanciája jellemzi.

Hipotézisünkben a geometriai szemléletmódot nem tartottuk a matematikai teljesítmény fontos összetevőjének, mivel a térszemlélet hiánya általában csak a matematikai anyagnak egy meglehetősen szűk részénél a térgeometriában támaszt nehézséget. Így a matematikai képesség szempontjából relevanciája nem értelemszerű, ám szignifikáns megjelenése mindkét korosztálynál szembeötlő. A szakirodalom alapján a matematikai tehetség identifikációjában egyik irányelv az, hogy számos, a matematikai képességet mérő eljárás geometriai rejtvényből áll (*Gyarmathy*, 2001).

A kapott eredményeket összevetve (a leíró statisztikában kapott eredményekkel is összhangban) az látszik, hogy a matematikai gondolkodásmód fejleszthető; az életkor determinisztikusan meghatározza a matematikai teljesítményt. A vizsgálatban felvett feladatsorok területei közül a kreativitás az, ahol legmarkánsabban mutatkozik meg a fejlődés; a hetedikes mintában a százalékos átlagteljesítmény 21,21%, míg a tizenegyedikes mintában 51,84% volt. A korreláció és a faktoranalízis vizsgálatainak eredményei is alátámasztják a kreativitás fejleszthetőségét. A matematika oktatásának – bár a szaktudomány szempontjából fontos ismereteknek hangsúlyt kell kapnia –, hajtóereje az intuíció és az alkotókedv. Nem szabad megragadni azon a szinten, hogy a matematikát úgy tekintsük, mint definíciókból és posztulátumokból levezetett tételek rendszere. Ha ez ugyanis igaz lenne, és a matematika-oktatásban erre helyeznénk a hangsúlyt, akkor a matematika definíciókkal, szabályokkal és szillogizmusokkal való játék lenne, minden cél és értelem nélkül. A matematika azonban az emberi gondolkodás egy olyan jellegzetes terméke, amelyben a legtisztábban fejeződik ki a megfigyelő értelme, a vállalkozó kedve és az esztétikai érzéke (*Courant* és *Robbins,* 1966). A matematika minden más tudománynál élénkebb képzelőerőt tételez fel azoknál, akik új felfedezésekkel hivatottak gyarapítani ezt a tudományt. A gondolatok tisztasága egymagában sohasem vezetett új felfedezésekhez. A matematikus legjobb műve emelkedett művészet, ami tökéletes, vakmerő, mint a képzelet legrejtettebb álma, világos és egyszerű, mint az elvont gondolat.

A vizsgálat második részében arra voltunk kíváncsiak, hogy milyen kapcsolat van a matematikai teljesítmény és a Raven-teszt által mért intelligencia között. Az adatok kiértékelése során sem a hetedikes részmintában, sem a tizenegyedikes részmintában nem adódott szignifikáns kapcsolat a matematikai összteljesítmény és a Raven-teszt eredményei között. Ezek után megvizsgáltuk, hogy az egyes matematikai tesztek milyen kapcsolatot mutatnak a Raven-teszttel. A hetedikes mintában a SZÖVEGES, a SZÁMSOR, a RUTH és a KREATÍV feladatsoron, míg a tizenegyedik évfolyamon csak a SZÖVEGES feladatsoron elért eredmény magyarázott szignifikáns darabot a függő változó heterogenitásából. A SZÖVEGES feladatsor meghatározottsága meglepő, ugyanis a SZÖVEGES feladatsor a mennyiségi gondolkodást reprezentálva, a matematikai tulajdonságok és relációk ismeretére épül, azaz konkrét matematikai anyaghoz köthető. A SZÁMSOR feladatsorral való szoros kapcsolat csak a hetedikes mintában mutatkozott meg, pedig ez a teszt a logikai következtető-képesség tipikus jellemzőit, a fejlett absztraháló képességet, a funkcionális jellegű gondolkodást, különböző lánc-konklúziók megfogalmazásának képességét és az elég magas koncentráló képesség-összetevőket mozgatja meg. A Raven-teszt megoldásához is a fent említett logikai következtető-képességre van szükség. A hetedikes mintában a KREATÍV feladatsorral is szignifikáns kapcsolat mutatkozott. Míg az intelligenciateszt a konvergens gondolkodást mozgósítja, addig a kreativitás a divergens gondolkodással hozható kapcsolatba, vagyis a kreativitás és az intelligencia egymástól eltérő fogalomnak tekinthető. A kreativitás és a Raven-féle intelligencia között megmutatkozó kapcsolatnak az lehet a magyarázata, hogy a legtöbb kreatív gondolkodó egyben igen értelmes is.

Irodalom

Anderson, J. R. (1993): *Rules of the mind*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Bondesan, M. G. és Ferrari, P. L. (1991): The active comparison of strategies in problem-solving: An exploratory study. In: Furinghetti, F. (szerk.): *Proceedings on the 15th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*. Italy: U-Press, Genova. 168–175.

Bransford, J. D. és mtsai (1988): Uses of macro-contexts to facilitate mathematical thinking. In: Charles, R. I. és Silver, E. A. (szerk.): *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates és National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale. 125–147.

Brown, A. L. (1974): The role of strategic behavior in retardate memory. In: Ellis, N. R. (szerk.): *International review of research in mental retardation*. Academic Press, New York. 55–111.

Brown, A. L. (1975): The development of memory: Knowing, knowing about knowing, and knowing how to know. In: Reese, H. W. (szerk.): *Advances in child development and behavior*. Academic Press, New York. 103–152.

Brown, A. L. és Barscaly, C. R. (1976): The effects of training specific mnemonics on the metamnemonic efficiency of retarded children. *Child development*, **47**. 71–80.

Carpenter, T. P. és mtsai (1990): What one intelligence test measures: A theoretical account of the processing in the Raven Matrices Test. *Psychological Review*, **97**. 404–431.

Carroll, J. B. (1993): *Human Cognitive Abilities: A survey of faktoranalitic studies.* Cambridge University Press, New York. Idézi: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (1998, szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest. 15–37.

Carroll, J. B. (1998): Matematikai képességek: A faktoranalitikus módszer néhány eredménye. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest. 15–37.

Courant, R. és Robbins, H. (1966): *Mi a matematika*? Gondolat Könyvkiadó, Budapest.

Czeizel Endre (1997): *Sors és tehetség*. FITT IMAGE és a Minerva Kiadó, Budapest.

Csapó Benő (1994): Az induktív gondolkodás fejlődése. *Magyar Pedagógia*, 1–2. sz. 53–80.

Csapó Benő és Korom Erzsébet (1998): Az iskolai tudás és az oktatás minőségi fejlesztése. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó, Budapest. 295–302.

Csíkos Csaba és Dobi János (2001): Matematikai nevelés. In: Báthory, Z. és Falus, I. (szerk.): *Tanulmányok a neveléstudomány köréből*. Osiris Kiadó, Budapest. 354–372.

Davies, P. (1995): Isten gondolatai. *Egy racionális világ tudományos magyarázata*. Kulturtrade Kiadó, Budapest.

Dreyfus, T. és Eisenberg, T. (1998): A matematikai gondolkodás különböző oldalairól. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest. 249–278.

Gárgyán, M. Ö. (2002): *Néhány gondolkodási képesség fejlődésének longitudinális vizsgálata*. Szakdolgozat, Szeged.

Geary, D. C. (1993): Mathematical disabilities*:* Cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, 114. sz. 345–362.

Geary, D. C. (1994): *Children's mathematical development: Research and practical applications.* DC: American Psychological Association, Washington.

Gillman, L. (1994): Can students solve math problems? *Focus, the Newsletter of the MAA,* **3**. 14. sz. 12–13.

Guilford, J. P. (1950): Creativity. *American Psychologist*, **5**. 444–454. Idézi: Szabó, Cs. (1997): *Gondolkodás.* Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen. 187–191.

Gullasch, R. (1971): *Denkpsychologische Analysen mathematischer Fähigkeiten.* Verlag, Berlin.

Gyarmathy Éva (2001): *A tehetségről.* Arany János Tehetséggondozó Program Intézményeinek Egyesülete, Miskolc.

Halmos, P. (1968): Mathematics as a creative art. *American Scientist,* **56**. 375–389.

Hardy, G. H. (1940): A mathematician's apology. UK: Cambridge University Press, Cambridge. Idézi: Tall, D. (1991, szerk.): *Advanced mathematical thinking*. The Netherlands: Kluwer, Dordrecht. 82–49.

Hebb, D. O. (1995): *A pszichológia alapkérdései*. Gondolat – trivium, Budapest.

Heller, K. A., Mönks, F. J. és Passow, A. H. (1993): *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent.* Pergamon Press Ltd., Oxford.

Holyoak, K. J. és Thagard, P. R. (1989): Analogical mapping by constraint satisfaction. *Cognitive Science*, **13**. 29–355.

Horváth György (1993): *Bevezetés a tesztelméletbe*. Keraban Könyvkiadó, Budapest.

Józsa Krisztián (2000): *A számlálási készség kritériumorientált fejlesztése. Új Pedagógiai Szemle*, 7–8. sz. 270–278.

Kondé, Z. és Cziegler, I. (2001): Központi végrehajtó működés, figyelmi szelekció és matematikai tehetség. *Alkalmazott Pszichológia,* **3**. 2. sz. 5–25.

Krutetki, V. A. (1968): *Pshihologhiia matematiceskih sposobnostei skolnikov.* Moskova, Iz-tvo Prosvescenie. In: Rosca, A. és Zörgő, B. (1973): *A képességek*. Tudományos Könyvkiadó, Budapest. 73–150.

Kupás, P. (1997): *A matematikai élményekről és az esztétikumról.* Szakdolgozat, Eötvös Lóránd Tudomány-egyetem, Budapest.

Lakatos Imre (1998): *Bizonyítások és cáfolatok. A matematikai felfedés logikája.* Typotex, Budapest.

Lubinski, D. és Benbow, C. P. (1994): The Study of Mathematicaly Precocious Youth: The first three decades of a planned 50-year study of intellectual talent. In: Subotnik, R. F. és Arnold, K. D. (szerk.): *Beyond Terman: Contemporary longitudinal studies of giftedness and talent*. NJ: Ablex, Norwood. 255–281.

Maher, C. A. és Martino, A. M. (1998): The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, **27**. 194–214.

Mason, J., Burton, L. és Stacey, K. (1982): *Thinking mathematically*. Addison-Wesley, London.

Medin, D. L. és Smith, E. E. (1984): Concepts and concepts formation. In: Rosenzweig, M. R. és Porter, L. W. (szerk.): *Annual Review of Psychology*, **35**. 113–138.

Nagy József (1998): Kognitivizmus és az értelem kiművelése. *Iskolakultúra*, 5. sz. 3–19.

Nagy József (1999): A kognitív készségek és képességek fejlesztése. *Iskolakultúra*, **1**. 14–26.

Nagy József (2000): *XXI. század és nevelés*. Osiris Kiadó, Budapest.

National Council of Teachers of Mathematics (1989): *Curriculum and cultivation standards for school mathematics*. VA: Author, Reston.

Niss, M. (1999): Competencies and subject description. *Uddanneise*, **9**. 21–19.

Orton, A. (1992): Learning mathematics: Issues, theory and classroom practice. Cassell, London.

Poincaré, H. (1952): Science and Method. Dover, New York. Idézi: Gyarmathy Éva (2001): *A tehetségről*. Arany János Tehetséggondozó Program Intézményeinek Egyesülete, Miskolc. 79–112.

Pólya György (1957): *A gondolkodás iskolája*, Bibliotheca. Budapest.

Reichel, H. C. (1997): Identifying and promoting mathematiccaly gifted pupils and students (12-20 years). *High Ability Studies*, **8.** 2. sz. 223–232.

Rosca, A. és Zörgő, B. (1973): *A képességek*. Tudományos Könyvkiadó, Budapest.

Rosch, E. (1973): On the internal structure of perceptual and semantic categories. In: Moore, T. E. (szerk.): *Cognitive development and the acquisition of languange*. Academic Press, New York. 111–144.

Rosch, E. (1978): Principles of categorization. In: Rosch, E. és Lloyd, B. (szerk.): *Cognition and categorization*. NJ: Lawrance Erlbaum Associates, Hillsdale. 27–48.

Salat, A-E. és Séra, L. (2002): A téri vizualizáció fejlesztése transzformációs geometriai feladatokkal. *Magyar Pedagógia*, 4. sz. 459–471.

Schoenfeld, A. H. (1988): When good teaching leads to bad results: the disasters of „well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist*, **23**. 145–166.

Selden, A., Selden, J. és Mason, A. (1994): Even good calculus students can't solve nonroutine problems. In: Kaput, J. és Dubinsky, E. (szerk.): *Research issues in undergraduate mathematics learning*. DC: Mathematical Association of America, Washington. 19–26.

Simon, H. A. és Zhu, X. (1998): Learning mathematics from examples and by doing. *Cognition and Instruction*, **4**. 137–166.

Skemp, R. R. (1971): *The psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books, Toronto.

Spaerman, C. (1904): „General intelligence", objectively determined and measured. American Journal of Psycholgy, 15, 201–293. Idézi: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (1998, szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest. 15–37.

Spaerman, C. (1927): The abilities of man: Their nature and measurement. MacMillan, New York. Idézi: Czeizel E. (1997): *Sors és tehetség*. FITT IMAGE és a Minerva Kiadó, Budapest. 13–39.

Stanley, J. C. (1974): Intellectual presociety. In: Stanley, J. C., Keating, D. P. és Fox, L. H. (szerk.): *Mathematical talent: Discovery, description, and development*. Johns Hopkins University Press, Baltimore. 1–22.

Sternberg, R. J. (1998): Mi a matematikai gondolkodás? In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest. 295–309.

Sternberg, R. J. és Horváth, J. (1995): A prototype view of expert teaching. *Educational Researcher,* **24**. 6. sz. 9–17.

Sydsæter, P. és Hammond, K. (2000): *Matematika Közgazdászoknak*. Aula Kiadó Kft, Budapest.

Szabó, Cs. (1997): *Gondolkodás.* Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen.

Vernon, P. E. (1969): Intelligence and Cultural Environment. Methuen, London. Idézi: Skemp, R. R. (1971): *The psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books, Toronto. 16. o.

Vidákovich Tibor (2003): *A szövegesfeladat-megoldás fejélődése: az olvasásmegértés és a mértékegység-váltás szerepe*. III. Országos Neveléstudományi Konferencia, Előadás, Budapest.

Völgyesi Pál (1982): *A Rudolf Amthauer-féle Intelligenz-Struktur-Test (IST) alkalmazhatósága a pályaválasztási tanácsadásban.* Módszertani füzetek. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest.

ABSTRACT

SZILVIA VINCZE: RESEARCH INTO THE COMPONENTS OF MATHEMATICAL ABILITY AND ITS CONNECTION WITH INTELLIGENCE

Mathematics systematises, creates axioms, obtains formulae, demonstrates theses, and introduces new concepts. A sharp and flexible-minded person with minimal preliminary knowledge on the topic can get down to its exploration and can be absorbed in problem solving. However, mathematics remains an unknown and unfathomable area for some people during their whole lifetime, while it becomes the „arena" of creating excellent products for others. It is obvious that mathematical talent has several components of differing degrees of importance. These basic abilities are indispensable for anyone to be good at mathematics, but are not sufficient for anyone to become a mathematical talent. This requires the high-level application of creative, deductive and quantitative thinking. The aim of this study is to examine the components of mathematical ability and the analysis of the relation between mathematics and intelligence in the context of particular mathematical sub-skills. The results of a preliminary investigation of this field are presented. The sample consisted 112 subjects, into two age groups (13- and 17-year-olds). The results of the preliminary investigation proved that the qualities relevant regarding mathematical ability are creativity, deductive reasoning and quantitative thinking. The correlation between the Raven intelligence test and mathematical ability proved to be strong, which cannot be considered a tendency-like relationship. As regards sub-skills, the Raven test had a strong correlation with the number series tasks, which assess inductive thinking.

Magyar Pedagógia, **103**. Number 2. 229–261. (2003)

Levelezési cím / Address for correspondence: Vincze Szilvia, H–4032 Debrecen, Görgey u. 16., VII/56.